Rendu de monnaie (d'après centrale 2002)

Partie I. Représentations de poids minimal

Question 1.

```
let rec est_un_systeme = function
  | [1]     -> true
  | a::b::l -> a > b && est_un_systeme (b::l)
  | _       -> false ;;
```

Question 2. Nous disposons de l'encadrement : $\mathrm{M}(x) \times c_m \leqslant x \leqslant \mathrm{M}(x) \times c_1$ qui donne : $\dfrac{x}{c_1} \leqslant \mathrm{M}(x) \leqslant x$, soit, puisque $\mathrm{M}(x)$ est un entier : $\left\lceil \dfrac{x}{c_1} \right\rceil \leqslant \mathrm{M}(x) \leqslant x$.

Question 3.

a) Soit $k' = (k'_1, \ldots, k'_j, \ldots, k'_m)$ une représentation minimale de $x - c_j$. Alors $k = (k'_1, \ldots, k'_j + 1, \ldots, k'_m)$ est une représentation (non nécessairement minimale) de x donc : $\mathrm{M}(x) \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{m} k'_i$, soit $\mathrm{M}(x) \leqslant 1 + \mathrm{M}(x - c_j)$.

b) Avec les notations précédentes, si $\mathrm{M}(x) = 1 + \mathrm{M}(x - c_j)$ alors $k = (k'_1, \ldots, k'_j + 1, \ldots, k'_m)$ est une représentation minimale de x faisant intervenir c_j.
Réciproquement, supposons qu'il existe une représentation minimale $k = (k_1, \ldots, k_j, \ldots, k_m)$ de x pour laquelle $k_j \geqslant 1$. Alors $k' = (k_1, \ldots, k_j - 1, \ldots, k_m)$ est une représentation (non nécessairement minimale) de $x - c_j$, et : $\mathrm{M}(x - c_j) \leqslant \sum_{i=1}^{m} k_i - 1$, soit $\mathrm{M}(x - c_j) \leqslant \mathrm{M}(x) - 1$. Compte tenu de la question précédente, on en déduit $\mathrm{M}(x) = \mathrm{M}(x - c_j) - 1$, ce qui achève la preuve de l'équivalence.

c) D'après la question 3.a nous avons : $\mathrm{M}(x) \leqslant 1 + \min\limits_{s \leqslant i \leqslant m} \mathrm{M}(x - c_i)$.
Soit maintenant $j \in [\![s, m]\!]$ tel que c_j intervienne dans une représentation minimale de x. D'après la question 3.b, on a $\mathrm{M}(x) = 1 + \mathrm{M}(x - c_j)$, donc en définitive : $\mathrm{M}(x) = 1 + \min\limits_{s \leqslant i \leqslant m} \mathrm{M}(x - c_i)$.

Question 4. Nous allons construire le tableau $[|\mathrm{M}(0); \mathrm{M}(1); \cdots; \mathrm{M}(x)|]$ en observant que la formule établie à la question 3 permet de remplir la case d'indice i une fois toutes les cases d'indices $j < i$ remplies.

```
let poids_minimaux x c =
  let m = make_vect (x+1) 0 in
  let rec aux y acc = function
    | []               -> acc
    | c::l when c > y -> aux y acc l
    | c::l             -> aux y (min acc m.(y-c)) l
  in
  for y = 1 to x do
    m.(y) <- 1 + aux y y c
  done ;
  m ;;
```

L'appel `aux y y c` calcule la valeur $\min\limits_{s \leqslant i \leqslant m} \mathrm{M}(y - c_i)$. La valeur initiale de l'accumulateur peut être prise égale à y compte tenu de l'inégalité $\mathrm{M}(y) \leqslant y$.

Partie II. L'algorithme glouton

Question 5.

```
let rec glouton x = function
  | [1]  -> [x]
  | c::l -> let q = x / c in q::(glouton (x - c * q) l)
  | _    -> invalid_arg "glouton" ;;
```

Le dernier motif n'est présent que pour rendre le filtrage exhaustif ; il ne sert à rien dès lors que c est un système valide (la fonction **invalid_arg** déclenche l'exception **Invalid_argument**).

Question 6.

a) Si $c = (c_1, c_2)$ avec $c_1 \geqslant 2$ et $c_2 = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(x) = (q, r)$ avec $x = qc_1 + r$ et $0 \leqslant r \leqslant c_1 - 1$ (c'est le quotient et le reste de la division euclidienne de x par c_1). On a donc : $\mathrm{G}(x) = q + r$.
Considérons maintenant une représentation minimale (q', r') de x. Alors :

$$x = qc_1 + r = q'c_1 + r' \quad \text{et} \quad q' + r' \leqslant q + r.$$

De l'égalité : $q' + r' = q + r + (q - q')(c_1 - 1)$ on déduit : $q - q' \leqslant 0$. Or $q' > q$ implique $q'c_1 > x$, ce qui est absurde. On a donc $q = q'$ et par suite $r = r'$. Ainsi, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{M}(x)$, et de plus la représentation gloutonne est l'unique représentation minimale de x.

b) Considérons le système $c = (4, 3, 1)$ et $x = 6$. Alors $\Gamma(x) = (1, 0, 2)$ donc $\mathrm{G}(x) = 3$, alors que $\mathrm{M}(x) = 2$ puisque $x = 3 + 3$. Plus généralement, tout système $c = (p, p - 1, 1)$ avec $p > 3$ et $x = 2p - 2$ convient.

c) Considérons $x = 48$. Alors $\Gamma(x) = (1, 0, 1, 1, 0, 0)$ donc $\mathrm{G}(x) = 3$, alors que $\mathrm{M}(x) = 2$ puisque $48 = 24 + 24$.

Partie III. L'algorithme de Kozen et Zaks

Question 7.

a) Si $x \geqslant c_1$, l'algorithme glouton va commencer par retirer au moins une pièce c_1 à la valeur x, ce qui permet d'écrire : $\mathrm{G}(x) = 1 + \mathrm{G}(x - c_1)$.
Si $k_1 \neq 0$, d'après 3.b on peut écrire : $\mathrm{M}(x) = 1 + \mathrm{M}(x - c_1)$, et alors $\mathrm{M}(x) < \mathrm{G}(x) \Rightarrow \mathrm{M}(x - c_1) < \mathrm{G}(x - c_1)$, ce qui prouve que si x est un contre exemple, $x - c_1$ aussi.

b) On a déjà : $\mathrm{G}(x) = 1 + \mathrm{G}(x - c_1) = 1 + \mathrm{M}(x - c_1)$.
Par ailleurs, d'après la question 3.a, $\mathrm{M}(x - c_1) \leqslant 1 + \mathrm{M}(x - c_1 - c_i)$ d'où : $\mathrm{G}(x) \leqslant 2 + \mathrm{M}(x - c_1 - c_i)$.
Mais alors $\mathrm{G}(x) \leqslant 2 + \mathrm{G}(x - c_1 - c_i) = 1 + \mathrm{G}(x - c_i)$ donc $\mathrm{M}(x) < 1 + \mathrm{G}(x - c_i)$.
Or la question 3.b nous permet d'écrire : $\mathrm{M}(x) = 1 + \mathrm{M}(x - c_i)$, donc $\mathrm{M}(x - c_i) < \mathrm{G}(x - c_i)$, et $x - c_i$ est un contre-exemple.

c) Soit x le plus petit des contre-exemples.

- Si on avait $x \geqslant c_1 + c_2$, d'après les questions 7.a et 7.b il existerait $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $x - c_i$ soit un contre-exemple, ce qui contredit le caractère minimal de x. Ainsi, $x < c_1 + c_2$.
- Si $x < c_{m-2}$, on a $\Gamma(x) = (0, \ldots, 0, q, r)$, où (q, r) est la représentation gloutonne dans le système (c_{m-1}, c_m). Compte tenu de la question 6.a on a $\mathrm{G}(x) = \mathrm{M}(x)$, et x n'est pas un contre-exemple.
- Si $x = c_{m-2}$, on a $\Gamma(x) = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0)$ et $\mathrm{G}(x) = 1 = \mathrm{M}(x)$, donc x n'est pas un contre-exemple.
- Si $x = c_{m-2} + 1$, deux cas de figure sont à envisager :
  - si $c_{m-3} = c_{m-2} + 1$ on a $\Gamma(x) = (0, \ldots, 1, 0, 0, 0)$ et $\mathrm{G}(x) = 1 = \mathrm{M}(x)$;
  - si $c_{m-3} > c_{m-2} + 1$ on a $\Gamma(x) = (0, \ldots, 0, 1, 0, 1)$ et $\mathrm{G}(x) = 2 = \mathrm{M}(x)$.

  Dans les deux cas, x n'est pas un contre-exemple.

En conclusion, si x est un contre exemple, alors $c_{m-2} + 1 < x < c_1 + c_2$.

Question 8.

a) Considérons l'entier $x = 2q$. On a $\Gamma(x) = (1,0,q-1)$ donc $\mathrm{G}(x) = q$ alors que $\mathrm{M}(x) = 2$. x est donc un contre-exemple, et ce système n'est pas canonique.

Considérons x le plus petit des contre-exemples, et $k = (k_1,k_2,k_3)$ une de ses représentations minimales. D'après la question 7.c, x se trouve dans l'intervalle $[\![q+3,2q]\!]$. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant $x < 2q$.

Notons déjà que $\Gamma(x) = (1,0,x-q-1)$ donc $\mathrm{G}(x) = x-q$.

- Si $k_1 > 0$, d'après la question 7.a, $x-q-1$ est aussi un contre-exemple, ce qui ne se peut. On a donc $k_1 = 0$.
- Si $k_2 > 0$ alors $k_2 = 1$ car $x < 2q$. Mais alors $k = (0,1,x-q)$ et $\mathrm{M}(x) = x-q+1 > \mathrm{G}(x)$, ce qui est absurde.
- Si $k_2 = 0$ alors $k = (0,0,x)$ et $\mathrm{M}(x) = x > \mathrm{G}(x)$, ce qui est absurde.

De ceci il résulte que $2q$ est bien le plus petit des contre-exemples.

b) On a $\Gamma(\alpha(q)+2) = (1,0,2)$ donc $\mathrm{G}(\alpha(q)+2) = 3$; pour que $\alpha(q)+2$ soit un contre-exemple il est nécessaire que $\mathrm{M}(\alpha(q)+2)$ soit égal à 2 (1 est exclus puisque $\alpha(q)+2 > \alpha(q)$). Considérons alors toutes les représentations à deux pièces de $\alpha(q)+2$:

- $k = (2,0,0)$ implique $\alpha(q)+2 = 2\alpha(q)$ soit $\alpha(q) = 2$, ce qui est exclus ;
- $k = (0,2,0)$ implique $\alpha(q)+2 = 2q$ soit $\alpha(q) = 2q-2$;
- $k = (0,0,2)$ implique $\alpha(q)+2 = 2$ soit $\alpha(q) = 0$, ce qui est exclus ;
- $k = (1,1,0)$ implique $\alpha(q)+2 = \alpha(q)+q$ soit $q = 2$, ce qui est exclus ;
- $k = (1,0,1)$ implique $\alpha(q)+2 = \alpha(q)+1$, ce qui est exclus ;
- $k = (0,1,1)$ implique $\alpha(q)+2 = q+1$ soit $\alpha(q) = q-1$, ce qui est exclus.

Seul $\alpha(q) = 2q-2$ convient, donc on peut affirmer que $(2q-2,q,1)$ n'est pas canonique et admet $2q$ comme plus petit contre-exemple.

c) Ces deux questions montrent que les bornes établies à la question 7.c sont optimales : la question 8.a donne un cas où le plus petit des contre-exemples vaut c_1+c_2-1 , la question 8b un cas où il vaut $c_{m-2}+2$.

Question 9.

a) Si x est un témoin, on a (en utilisant la question 3.a) : $\mathrm{M}(x) \leqslant 1+\mathrm{M}(x-c_i) \leqslant 1+\mathrm{G}(x-c_i) < \mathrm{G}(x)$ donc x est un contre-exemple.

b) Dans le système $(5,4,1)$, $x = 12$ est un contre exemple puisque $\Gamma(12) = (2,0,2)$ donc $\mathrm{G}(x) = 4$ alors que $\mathrm{M}(x) = 3$ puisque $12 = 4+4+4$.

En revanche, ce n'est pas un témoin puisque $\mathrm{G}(x-c_1) = \mathrm{G}(7) = 3$, $\mathrm{G}(x-c_2) = \mathrm{G}(8) = 4$ et $\mathrm{G}(x-c_3) = \mathrm{G}(11) = 3$ alors que $\mathrm{G}(x)-1 = 3$.

c) Soit x le plus petit des contre-exemples, et k une de ses représentations minimales. On choisit un indice i tel que $k_i \neq 0$. D'après la question 3.b, $\mathrm{M}(x) = 1+\mathrm{M}(x-c_i)$, et puisque $x-c_i$ n'est pas un contre-exemple, $\mathrm{M}(x) = 1+\mathrm{G}(x-c_i)$. Or $\mathrm{M}(x) < \mathrm{G}(x)$, donc $\mathrm{G}(x-c_i) < \mathrm{G}(x)-1$, et x est un témoin.

Question 10. Commençons par deux fonctions calculant respectivement $c_{m-2}-2$ et c_1+c_2-1 :

```
let rec borne_inf = function
  | [a; b; c] -> a + 2
  | _::l      -> borne_inf l
  | _         -> invalid_arg "borne_inf" ;;

let borne_sup = function
  | a::b::_ -> a + b - 1
  | _       -> invalid_arg "borne_sup" ;;
```

Il nous faut ensuite pouvoir calculer la fonction G de l'énoncé. Pour cela on adapte la fonction **glouton** obtenue à la question 5 :

```
let rec g x = function
  | [1]  -> x
  | c::l -> let q = x / c in q + (g (x - c * q) l)
  | _    -> invalid_arg "glouton" ;;
```

Rédigeons alors une fonction déterminant si un élément x est un témoin pour le système c :

```
let est_un_temoin x l =
  let rec aux = function
     | []               -> false
     | c::q when c < x -> g (x-c) l < g x l - 1 || aux q
     | _::q             -> aux q
  in aux l ;;
```

Il reste à écrire la fonction principale :

```
let kozen_zaks c =
   let a = borne_inf c and b = borne_sup c in
   let rec aux = function
      x when x = b               -> true
    | x when est_un_témoin x c -> false
    | x                          -> aux (x+1)
   in aux (a+1) ;;
```

Questions hors barème

Question 11. Supposons l'existence d'un entier n tel que le système $c = (q^n, q^{n-1}, \dots, q, 1)$ ne soit pas canonique. Il existe donc un entier x tel que $\mathrm{M}(x) < \mathrm{G}(x)$.
Notons $(g_1, \dots, g_{n+1})$ la représentation gloutonne de x, et $(k_1, \dots, k_{n+1})$ une représentation minimale de x.

Considérons le plus petit entier i tel que $g_i \neq k_i$. Quitte à remplacer x par $x - \sum_{j=1}^{i-1} g_j c_j$ et c par $(c_i, \dots, c_{n+1})$ on peut supposer $i = 1$.

On a $g_1 = \left\lfloor \frac{x}{q^n} \right\rfloor$ donc $(1+g_1)q^n > x$ et donc $k_1 < g_1$. Quitte à remplacer x par $x - k_1 q^n$ on peut supposer $k_1 = 0$ et $g_1 \geqslant 1$.

Remarquons enfin que pour tout i on a $k_i \leqslant q-1$ car dans le cas contraire q pièces de valeur q^{n+1-i} pourraient être remplacées par une pièce de valeur q^{n+2-i} et contredire le caractère minimal de k.

Ainsi, $k_1 = 0$ impose $x \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} (q-1)q^j = q^n - 1$ alors que $g_1 \geqslant 1$ impose $x \geqslant q^n$. La contradiction recherchée est établie.

Question 12. Vérifier par l'algorithme de Kozen et Zaks que le système $(q^n, q^{n-1}, \dots, q, 1)$ est canonique (pour $q \geqslant 2$) demande de vérifier l'absence de témoin dans l'intervalle $[\![q^2+2, q^n+q^{n-1}-1]\!]$; le nombre d'éléments de cet intervalle croit exponentiellement avec n donc dans ce cas de figure le coût de l'algorithme est exponentiel en $m = n+1$.

Considérons maintenant le système $(1+q^n, q^n, q^{n-1}, \dots, q, 1)$. Puisque le système $(q^n, q^{n-1}, \dots, q, 1)$ est canonique, le plus petit contre-exemple, *s'il en existe*, est au moins égal à q^n+1, et l'algorithme de Kozen et Zaks aura donc dans tous les cas un coût exponentiel.
Il reste à vérifier que ce système n'est pas canonique, en montrant par exemple que $x = q^n + q$ est un contre-exemple (au moins pour $q \geqslant 3$) : on a $\mathrm{M}(x) = 2$ alors que $\mathrm{G}(x) = q$ puisque $\Gamma(x) = (1, 0, \dots, 0, q-1)$.