Corrigé : mots de Lukasiewicz

Partie I. Quelques propriétés

Question 1. (-1) est le seul mot de Lukasiewicz de longueur 1 ; il n'y en a pas de longueur 2, et un seul de longueur 3 : le mot $(+1,-1,-1)$.
Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_{2p})$ est un mot de longueur paire, la somme $\sum_{i=1}^{2p} u_i$ est paire donc u ne peut être un mot de Lukasiewicz.

Question 2. La fonction suivante utilise un accumulateur égal au poids du mot parcouru.

```
let luka u =
  let rec aux acc = function
    | []   -> acc = -1
    | t::q -> acc >= 0 && aux (acc + t) q
  in aux 0 u ;;
```

Question 3. Un mot est de Lukasiewicz lorsque son poids est égal à -1 et le poids de tous ses préfixes stricts, positifs.
Considérons donc deux mots de Lukasiewicz u et v, et posons $w = (+1)\cdot u \cdot v$.
On a $p(w) = 1 + p(u) + p(v) = 1 - 1 - 1 = -1$.
Passons maintenant en revue les différents préfixes stricts w' de w :

- si $w' = (+1)$ alors $p(w') = 1 \geqslant 0$;
- si $w' = (+1)\cdot u'$ où u' est un préfixe strict de u, alors $p(w') = 1 + p(u') \geqslant 1$;
- si $w' = (+1)\cdot u$ alors $p(w') = 1 + p(u) = 0$;
- enfin, si $w' = (+1)\cdot u \cdot v'$ où v' est un préfixe strict de v, alors $p(w') = 1 + p(u) + p(v') = p(v') \geqslant 0$.

Dans tous les cas on a $p(w') \geqslant 0$ donc w est bien un mot de Lukasiewicz.

Question 4. Soit w un mot de Lukasiewicz de longueur supérieure ou égale à 3. On a $p(w_1) \geqslant 0$ donc $w_1 = (+1)$. Posons $w = (+1)\cdot w'$ et notons u le plus petit préfixe strict de w' vérifiant $p(u) = -1$. Un tel préfixe existe puisque $p(w'_1) \geqslant -1$ et $p(w') = -2$. Notons alors $w = (+1)\cdot u \cdot v$, et vérifions que u et v sont des mots de Lukasiewicz.
Par construction, $p(u) = -1$ et $p(w) = 1 + p(u) + p(v)$ donc $p(v) = p(w) = -1$.
Si u' est un préfixe strict de u, alors $(+1)\cdot u'$ est préfixe strict de w donc $p(u') \geqslant -1$. Mais par définition de u, $p(u')$ ne peut être égal à -1, donc $p(u') \geqslant 0$.
Si v' est un préfixe strict de v, alors $(+1)\cdot u \cdot v'$ est préfixe strict de w donc $1 + p(u) + p(v') \geqslant 0$ soit $p(v') \geqslant 0$.
u et v sont donc bien des mots de Lukasiewicz.

Supposons maintenant l'existence de deux décompositions $w = (+1)\cdot u \cdot v$ et $w = (+1)\cdot x \cdot y$. Sans perte de généralité on peut supposer que x est un préfixe de u. Mais s'il s'agissait d'un préfixe strict de u on aurait $p(x) \geqslant 0$, ce qui ne se peut. On a donc $x = u$ et par suite $y = v$. La décomposition est bien unique.

Question 5. On utilise le critère obtenu à la question précédente pour caractériser u. Dans cette question encore on utilise un accumulateur égal au poids du préfixe parcouru.

```
let decompose w =
  let rec aux acc = function
    | s when acc = -1 -> ([], s)
    | s               -> let (u, v) = aux (acc + hd s) (tl s)
                         in (hd s)::u, v
  in aux 0 (tl w) ;;
```

Question 6. Un algorithme récursif calculant l'ensemble des mots de longueur $2n+1$ à partir d'un appel récursif sur tous les mots de longueurs $2p+1$ et $2(n-p-1)+1$ imposerait de recalculer les mêmes mots un très grand nombre de fois et serait donc très coûteux (de complexité exponentielle) ; il est préférable de procéder à une mémoïsation des mots de longueurs inférieures pour ne les calculer qu'une fois ; c'est la démarche qui est suivie dans la question suivante, en suivant le principe de la programmation dynamique.

Question 7. Le seul mot de Lukasiewicz de longueur 1 est égal à (-1) ; tout mot de longueur $2n+1$ s'écrit de manière unique sous la forme $(+1)\cdot u \cdot v$ avec $|u| = 2p+1$, $|v| = 2q+1$ et $p+q = n-1$. Ainsi, pour obtenir tous les mots de longueur inférieure ou égale à $2n+1$, nous allons construire un tableau `t` de taille $n+1$, la case `t.(k)` contenant la liste des mots de taille $2k+1$.
Nous avons tout d'abord besoin d'une fonction qui à deux listes de mots $[u_1,\dots,u_p]$ et $[v_1,\dots,v_q]$ associe la liste des mots de la forme $(+1)\cdot u_i \cdot v_j$:

```
let rec merge u v = match (u, v) with
  | [], _ -> []
  | _, [] -> merge (tl u) v
  | _, _  -> (1::(hd u)@(hd v))::(merge u (tl v)) ;;
```

Cette fonction est de type *mot list –> mot list –> mot list*. Elle nous permet de construire le tableau `t` :

```
let tab n =
  let t = make_vect (n+1) [] in
  t.(0) <- [[-1]] ;
  for k = 1 to n do
    for p = 0 to k-1 do
      t.(k) <- t.(k) @ (merge t.(p) t.(k-1-p))
    done
  done ;
  t ;;
```

Cette fonction est de type *int –> mot list vect*.
Enfin, pour obtenir la liste des mots de Lukasiewicz il reste à réunir les cases de ce tableau :

```
let obtenir_luka n =
  let t = tab n in
  let rec aux = function
    | k when k = n+1 -> []
    | k              -> t.(k) @ (aux (k+1))
  in aux 0 ;;
```

Cette fonction est de type *int –> mot list*.

Question 8. Notons $\mathscr{L}$ l'ensemble des mots de Lukasiewicz et $\mathscr{B}$ l'ensemble des arbres binaires. Grâce à la question 4 on définit une application ϕ de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{B}$ en posant :

$$\phi((-1)) = \texttt{Vide} \qquad \text{et} \qquad \phi((+1)\cdot u \cdot v) = \texttt{Noeud}(\phi(u), \phi(v)).$$

Par induction structurelle cette application est bijective, d'application réciproque :

$$\phi^{-1}(\texttt{Vide}) = (-1) \qquad \text{et} \qquad \phi^{-1}(\texttt{Noeud}(g,d)) = (+1)\cdot \phi^{-1}(g)\cdot \phi^{-1}(d).$$

Ces deux fonctions se définissent sans peine en Caml :

```
let rec arbre_of_luka = function
  | [-1] -> Vide
  | w    -> let (u, v) = decompose w in Noeud (arbre_of_luka u, arbre_of_luka v) ;;

let rec luka_of_arbre = function
  | Vide          -> [-1]
  | Noeud (g, d) -> let u, v = luka_of_arbre g, luka_of_arbre d
                    in 1::u@v ;;
```

Partie II. Dénombrement

Question 9. Considérons le plus petit des entiers $i \in [\![1,n]\!]$ pour lesquels $p(u_1,\dots,u_i)$ est minimal, et considérons $v = (u_{i+1},\dots,u_n,u_1,\dots,u_i)$. Nous avons déjà $p(v) = -1$; il reste à considérer les préfixes stricts v' de v. Pour simplifier les notations, posons $u' = (u_1,\dots,u_i)$ et $u'' = (u_{i+1},\dots,u_n)$.

- Si v' est un préfixe de u'', alors $u'\cdot v'$ est un préfixe de u et par définition de i, $p(u'\cdot v') \geqslant p(u')$ donc $p(v') \geqslant 0$.

– Si $v' = u'' \cdot v''$, où v'' est un préfixe strict de u', alors par définition de i, $p(v'') > p(u')$ donc $p(v') > p(u') + p(u'') = p(u) = -1$, et $p(v') \geqslant 0$.

De ceci il résulte que v est un mot de Lukasiewicz.

Réciproquement, si $w = (u_{j+1}, \dots, u_n, u_1, \dots, u_j)$ est un mot de Lukasiewicz, alors pour tout $k \in [\![j+1, n]\!]$, $p(u_{j+1}, \dots, u_k) \geqslant 0$ donc $p(u_1, \dots, u_k) \geqslant p(u_1, \dots, u_j)$. Ceci prouve que $p(u_1, \dots, u_j)$ est minimal. Par définition de i nous avons $i \leqslant j$ et $p(u_1, \dots, u_i) = p(u_1, \dots, u_j)$.
Mais si $i < j$ nous aurions $p(u_{i+1}, \dots, u_j) = 0$, et puisque $p(w) = -1$ ceci impliquerait que $p(u_{j+1}, \dots, u_n, u_1, \dots, u_i) = -1$. Puisque w ne peut avoir de préfixe strict de poids négatif, ceci est absurde et $i = j$, ce qui prouve l'unicité du conjugué.

Question 10. Il s'agit donc de calculer le couple (u', u'') de telle sorte que $p(u')$ soit minimal. L'algorithme qui suit repose sur le fait que si $u = u_1 \cdot v$ avec $v = v' \cdot v''$ et $p(v')$ minimal, alors :

$$\begin{cases} u' = u_1 \text{ et } p(u') = u_1 & \text{si } p(v') \geqslant 0 \\ u' = u_1 \cdot v' \text{ et } p(u') = u_1 + p(v') & \text{si } p(v') < 0 \end{cases}$$

```
let conjugue u =
  let rec aux = function
    | []   -> 0, ([], [])
    | t::q -> match aux q with
        | p, (v, w) when p < 0 -> t+p, (t::v, w)
        | _, _                 -> t, ([t], q)
  in let _, (v, w) = aux u in w @ v ;;
```

La fonction **aux** calcule le couple $\big(p(u'), (u', u'')\big)$ (avec les notations de la question précédente).

Question 11. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des mots u de longueur $2n+1$ qui vérifient $p(u) = -1$, et $\mathscr{L}$ l'ensemble des mots de Lukasiewicz de longueur $2n+1$.

$\mathscr{E}$ est l'ensemble des mots composés de $n+1$ lettres (-1) et de n lettres $(+1)$, donc $|\mathscr{E}| = \binom{2n+1}{n}$.

L'application qui à un mot associe son conjugué réalise une application surjective de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{L}$. De plus, pour tout $u \in \mathscr{L}$, l'ensemble des antécédents de u est égal à l'ensemble des permutations circulaires de ses lettres. Nous allons montrer que celles-ci sont toutes distinctes, ce qui permettra d'affirmer que u possède exactement $2n+1$ antécédents, et le lemme des bergers permettra de conclure que $|\mathscr{L}| = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n}$.

Supposons donc qu'un mot $u \in \mathscr{E}$ possède deux permutations circulaires v et w identiques. Alors w est aussi une permutation circulaire des lettres de v, donc il existe deux mots x et y tels que $v = x \cdot y$ et $w = y \cdot x$, et donc $x \cdot y = y \cdot x$. D'après le résultat admis, il existe un mot z et deux entiers non nuls i et j tels que $x = z^i$ et $y = z^j$, et alors $v = z^{i+j}$. Mais dans ce cas, $p(v) = (i+j)p(z) = -1$, ce qui est absurde car $i + j \geqslant 2$ ne peut diviser -1.

Partie III. Capsules

Question 12. La suite $\big(|\rho^n(u)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers décroissante et minorée par 0, donc stationnaire. Il en est donc de même de la suite $\big(\rho^n(u)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 13.

```
let rec rho = function
  | 1::(-1)::(-1)::q -> (-1)::q
  | t::q             -> t::(rho q)
  | []               -> [] ;;
```

Question 14.

```
let rec rholim u =
  let v = rho u in if u = v then u else rholim v ;;
```

Question 15. Montrons tout d'abord que si u est un mot de Lukasiewicz, il en est de même de $\rho(u)$:

- $p(+1,-1,-1) = -1$ donc $p(\rho(u)) = p(u) = -1$.
- Notons v le préfixe qui précède la première capsule de u : $u = v \cdot (+1,-1,-1) \cdot w$. Alors $\rho(u) = v \cdot (-1) \cdot w$.
  Quel que soit le préfixe strict w' de w, on a $p(v \cdot (-1) \cdot w') = p(v) - 1 + p(w') = p(v \cdot (+1,-1,-1) \cdot w') \geqslant 0$ car u est un mot de Lukasiewicz. Ceci prouve que tout préfixe strict de $\rho(u)$ est de poids positif ou nul.

De ces deux points il résulte que $\rho(u)$ est encore un mot de Lukasiewicz. Par un raisonnement analogue on prouve la réciproque : si $\rho(u)$ est un mot de Lukasiewicz, il en est de même de u.

Montrons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que tout mot u de Lukasiewicz de longueur $2n+1$ contient au moins une capsule :

- C'est clair lorsque $n = 1$ puisque le seul mot de Lukasiewicz vaut dans ce cas $(+1,-1,-1)$.
- Si $n \geqslant 2$ et si le résultat est acquis jusqu'au rang $n-1$, on utilise la question 1.4 : $u = (+1) \cdot v \cdot w$, où v et w sont deux mots de Lukasiewicz, l'un au moins étant de longueur supérieure ou égale à 3. Par hypothèse de récurrence ce dernier contient une capsule, et donc u aussi.

Ainsi, si u est un mot de Lukasiewicz alors $\rho^*(u)$ doit être un mot de Lukasiewicz sans capsule, autrement dit (-1). Réciproquement, (-1) est un mot de Lukasiewicz donc si $\rho^*(u) = -1$ alors u est aussi un mot de Lukasiewicz.