Travaux pratiques

Méthode de Newton

Exercice 1. Méthodes de la sécante et de Newton-Raphson

a) Écrire une fonction `newton` qui prend en arguments une fonction f, sa dérivée f', un réel u_0 et une tolérance $\varepsilon > 0$ sur l'incrément, et qui retourne en cas de succès le couple (u_n, n) obtenu par la méthode de Newton-Raphson, u_n étant une valeur approchée d'un zéro de f et n le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtenir. On rappelle que la condition d'arrêt dans ce cas est : $|u_n - u_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

On limitera le nombre d'itérations à 100 et si cette valeur est atteinte, on décrétera l'echec de cette méthode en retournant la valeur `None`.

b) Écrire une fonction `secante` qui prend en arguments une fonction f, deux réels u_0 et u_1 et une tolérance $\varepsilon > 0$ sur l'incrément, et qui retourne en cas de succès le couple (u_n, n) obtenu par la méthode de la sécante, u_n étant une valeur approchée d'un zéro de f et n le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtenir. On limitera là encore le nombre d'itérations à 100.

c) On considère la fonction définie pour $x > 0$ par : $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Tracer le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[-3, 3]$ et observer que cette fonction possède un unique zéro réel.

Vérifier que pour toute valeur $u_0 \in [\![-3, 3]\!]$ la méthode de Newton-Raphson fournit la même valeur approchée à 10^{-12} près de l'unique zéro de f, et préciser le nombre maximal d'itération qui aura été nécessaire pour la trouver.

Déterminer pour quel couple $(u_0, u_1) \in [\![-3, 3]\!]^2$ avec $u_0 \neq u_1$ la méthode de la sécante a besoin du plus grand nombre d'itérations pour atteindre une précision de 10^{-12}.

Trouver une valeur u_0 de l'intervalle $[-3, 3]$ qui conduit à une situation d'échec pour la méthode de Newton-Raphson, c'est-à-dire pour laquelle le nombre d'itérations nécessaires dépasse 100.

d) On considère la fonction $f : x \mapsto 3\sin(4x) + x^2 - 2$. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3, 3]$, et démontrer que tous les zéros de f se trouvent dans cet intervalle.

Pour obtenir l'ensemble des zéros de f, on procède de la manière suivante : on tire aléatoirement une valeur u_0 dans l'intervalle $[-3, 3]$ et on applique la méthode de Newton-Raphson. Si celle-ci retourne un résultat on considère qu'on a trouvé un zéro de f. En répétant cette opération un grand nombre de fois on peut espérer obtenir l'ensemble de ces zéros.

Rédiger une fonction baptisée `zeros` qui applique cette méthode pour obtenir l'ensemble des zéros de cette fonction.

Exercice 2. Tache d'Airy

La tache d'Airy est la figure de diffraction résultat de la traversée d'un trou circulaire par la lumière. La figure présente une symétrie de révolution et prend la forme d'une tache brillante auréolée de cercles concentriques de plus faible luminosité (voir figure 1).

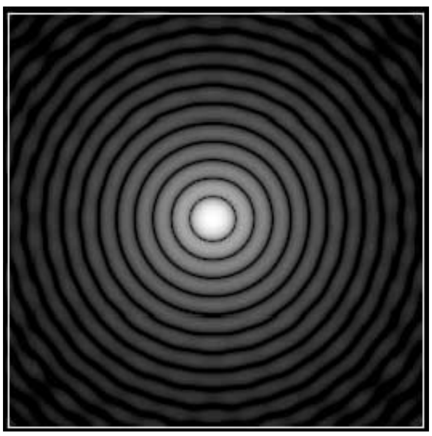

Figure 1 – La tache d'Airy et ses anneaux secondaires.

On peut démontrer que les rayons des différents cercles sombres sont liés aux zéros de la fonction :

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Nous admettrons que cette fonction et de classe $\mathscr{C}^1$ et que la dérivée de cette fonction s'écrit :

$$f'(x) = -\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide de la méthode de Newton-Raphson, déterminer des valeurs approchées des trois premiers zéros positifs de la fonction f.
Indication. Pour calculer les valeurs prises par f et f' on utilisera la fonction `quad` du module `scipy.integrate`.

Exercice 3. Dérivation numérique

Afin de pouvoir exploiter la méthode de Newton-Raphson sans avoir à donner l'expression de la dérivée de f, on peut chercher à approcher numériquement $f'(x)$ en considérant le taux d'accroissement de f entre $x-h$ et $x+h$.

a) Écrire une fonction `derivee` qui prend en arguments une fonction f et deux réels x et h et qui retourne ce taux d'accroissement.

b) De manière à déterminer expérimentalement la meilleure valeur de h, nous allons considérer la fonction $f = \sin$ dont la dérivée est bien connue, et noter $\delta(x,h)$ la différence (en valeur absolue) entre la dérivée numérique et la dérivée exacte au point x.
Pour $x = 1$, tracer le graphe de la fonction $p \mapsto \delta(1, 10^{-p})$ en faisant varier p entre 4 et 8 avec un pas de 0,1, et confirmer la valeur optimale déterminée par le calcul effectué en cours.

Exercice 4. Fractale de Newton

Étant donné un nombre complexe a, on considère le polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}-a\right)\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}+a\right)$ ainsi que son polynôme dérivé P'. À tout nombre complexe z on associe la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = z$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - \dfrac{\mathrm{P}(u_n)}{\mathrm{P}'(u_n)}$.
Comme on peut s'y attendre, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va en général converger vers l'une des trois racines de P, mais dans certains cas ne va pas converger (voire cesser d'être définie à partir d'un certain rang).
Le but de cet exercice est de représenter une portion carrée du plan complexe $(\mathfrak{Re}\,z, \mathfrak{Im}\,z) \in [u,v]^2$ dans laquelle chaque point d'affixe z sera coloré d'une façon différente suivant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1, -\frac{1}{2}-a, -\frac{1}{2}+a$ ou ne converge pas.

Représentation graphique.
La portion carrée du plan sera représentée par une matrice $n \times n$, la valeur de n permettant de choisir une résolution plus ou moins fine compte tenu du temps qui sera nécessaire aux calculs. Chaque case de ce tableau correspond donc à une valeur initiale $z \in \mathbb{C}$ et contiendra à la fin du processus l'un des quatre entiers $0, 1, 2, 3$ représentant respectivement les quatre situations décrites ci-dessus.
Le tableau initial sera créé à l'aide de la fonction :

> `numpy.zeros((n,n))` qui définit une matrice $n \times n$ dont chacune des cases contient la valeur 0.

Une fois le tableau `tab` rempli, la fonction :

> `matplotlib.pyplot.matshow(tab)` provoque l'affichage d'une image dans laquelle chaque valeur du tableau est représentée par une couleur différente, suivant un spectre défini par défaut.

Pour chaque valeur de z, il vous faudra itérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un nombre suffisant de fois, en choisissant un critère vous permettant d'affirmer sans trop de risque de se tromper que la suite converge.

a) La *fractale de Newton* est obtenue lorsque $a = i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c'est à dire lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 1$. Représentez-la dans le domaine $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathfrak{Re}\,z| \leqslant 2 \text{ et } |\mathfrak{Im}\,z| \leqslant 2\right\}$.

b) La valeur $a = -0,00508 + 0,33136i$ permet d'observer un phénomène intéressant, la présence d'un *lapin de* Douady. Faire le tracé dans le domaine $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathfrak{Re}\,z| \leqslant 2 \text{ et } |\mathfrak{Im}\,z| \leqslant 2\right\}$ puis dans $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathfrak{Re}\,z| \leqslant \dfrac{1}{10} \text{ et } |\mathfrak{Im}\,z| \leqslant \dfrac{1}{10}\right\}$.