Travaux pratiques

Résolution numérique d'une équation différentielle

Exercice 1. Dans cet exercice nous implémentons quelques unes des méthodes de résolution des équations différentielles étudiées en cours : méthode d'Euler, méthode de Heun, méthode RK$_4$ de Runge-Kutta. Chacune de ces méthodes sera expérimentée sur l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f(x,t) = \sin(t)\sin(x)$$

sur l'intervalle $[0, 50]$.

À l'aide de la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` (présentée en cours), tracer la solution de cette équation différentielle en subdivisant l'intervalle $[0, 50]$ en 256 points. Ce graphe servira de référence et sera superposé aux différents graphes obtenus dans la suite de cet exercice.
Dans les méthodes qui suivent, on suppose l'intervalle d'étude défini par une subdivision discrète $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ et on pose : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $h_k = t_{k+1} - t_k$.

a) La méthode d'Euler est basée sur le schéma numérique suivant :

$$p_1 = f(x_k, t_k) \qquad \text{et} \qquad x_{k+1} = x_k + p_1 h_k.$$

Rédiger une fonction `euler(f, x0, t)` qui prend en paramètres la fonction f, la valeur initiale x_0 et la subdivision $t = [t_0, \ldots, t_n]$ et qui retourne la liste des valeurs $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ calculées par la méthode d'Euler.
Superposer au graphe de référence les graphes qu'on obtient par la méthode d'Euler avec $n = 256$.

b) La méthode de Heun est basée sur le schéma numérique suivant :

$$p_1 = f(x_k, t_k), \quad p_2 = f(x_k + p_1 h_k, t_k + h_k) \qquad \text{et} \qquad x_{k+1} = x_k + \Big(\frac{p_1 + p_2}{2}\Big) h_k.$$

Rédiger une fonction `heun(f, x0, t)` qui prend en paramètres la fonction f, la valeur initiale x_0 et la subdivision $t = [t_0, \ldots, t_n]$ et qui retourne la liste des valeurs $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ calculées par la méthode de Heun.
Superposer au graphe de référence les graphes qu'on obtient par la méthode d'Heun avec $n = 256$.

c) La méthode RK$_4$ de Runge-Kutta est basée sur le schéma numérique suivant :

$$p_1 = f(x_k, t_k), \quad p_2 = f\Big(x_k + p_1 \frac{h_k}{2}, t_k + \frac{h_k}{2}\Big), \quad p_3 = f\Big(x_k + p_2 \frac{h_k}{2}, t_k + \frac{h_k}{2}\Big), \quad p_4 = f(x_k + p_3 h_k, t_k + h_k)$$
$$\text{et} \qquad x_{k+1} = x_k + \Big(\frac{p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4}{6}\Big) h_k.$$

Rédiger une fonction `rk4(f, x0, t)` qui prend en paramètres la fonction f, la valeur initiale x_0 et la subdivision $t = [t_0, \ldots, t_n]$ et qui retourne la liste des valeurs $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ calculées par la méthode RK$_4$.
Superposer au graphe de référence les graphes qu'on obtient par la méthode RK$_4$ avec $n = 256$.

d) (facultatif). La méthode d'Euler implicite est basée sur le schéma suivant :

$$p_1 = f(x_{k+1}, t_{k+1}) \qquad \text{et} \qquad x_{k+1} = x_k + p_1 h_k.$$

et nécessite pour être appliquée de résoudre l'équation $x_{k+1} = x_k + f(x_{k+1}, t_{k+1}) h_k$ d'inconnue x_{k+1}.
En utilisant la fonction `newton` du module `scipy.optimize` rédiger une fonction `eulerbis(f, x0, t)` qui applique cette méthode puis la tester avec l'exemple de référence.

Exercice 2. Dans cet exercice on considère l'équation différentielle $\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ à résoudre sur l'intervalle $[0,2]$.

Étant donnée une discrétisation $[t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1} = 2]$ de pas régulier et un tableau $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ obtenu par l'une des méthodes implémentées dans l'exercice précédent, on note e_n l'erreur de la méthode au rang n, définie par :

$$e_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_k - \tilde{x}(t_k)| \quad \text{où } \tilde{x} \text{ est la solution exacte de l'équation différentielle.}$$

Rédiger une fonction `erreur(methode, n)` qui prend en argument une des méthodes de l'exercice précédent et un rang n et qui retourne l'erreur de cette méthode au rang n.
Déterminer alors pour chacune des méthodes le rang minimal permettant d'atteindre une précision de :

- 10^{-1}, 10^{-2} puis 10^{-3} pour la méthode d'Euler ;
- 10^{-2}, 10^{-4} puis 10^{-6} pour la méthode de Heun ;
- 10^{-4}, 10^{-8} puis 10^{-12} pour la méthode RK_4.

On observera que l'erreur de la méthode d'Euler est d'ordre 1 (inversement proportionnelle à n), que l'erreur de la méthode de Heun est d'ordre 2 (inversement proportionnelle à n^2) et que l'erreur de la méthode RK_4 est d'ordre 4 (inversement proportionnelle à n^4).

Exercice 3. Dans cet exercice on considère le système différentiel et les conditions initiales :

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x - \sin(t)y \\ y' = \sin(t)x + \cos(t)y \end{cases} \qquad \text{avec } x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

a) À l'aide de la fonction `odeint`, tracer le graphe des solutions x et y sur l'intervalle $[0,4]$.

b) On souhaite maintenant appliquer la méthode d'Euler à ce système différentiel, autrement dit appliquer le schéma d'Euler à la fonction vectorielle $X = (x,y)$ solution de l'équation différentielle $X' = F(X,t)$ où $F((x,y),t) = (\cos(t)x + \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)$.
Rédiger une fonction `euler_vect(F, X0, t)` qui prend en paramètres la fonction F, la valeur initiale $X_0 = (x_0, y_0)$ et une subdivision $t = [t_0, t_1, \dots, t_n]$ et retourne le couple de tableaux $([x_0, x_1, \dots, x_n], [y_0, y_1, \dots, y_n])$.

c) À l'aide de cette fonction, superposer les solutions exactes et approchées sur l'intervalle $[0,4]$ (on prendra $n = 256$).

Exercice 4. Équation de Van der Pol
Le battement du cœur fait partie des systèmes naturels auto-excités pour lesquels on peut remarquer des oscillations avec relaxation. Ces phénomènes de relaxation se caractérisent par les propriétés suivantes :

- leur période est constante (temps de relaxation) ;
- la forme de l'onde est sensiblement différente d'une onde sinusoïdale ;
- l'amplitude de l'onde est indépendante de la force extérieure appliquée pourvu que cette force soit assez petite ;
- la période, en revanche, dépend de la force extérieure appliquée. Si celle-ci est périodique, le système de relaxation tend à se synchroniser pour devenir périodique avec la même période que celle de la force extérieure.

L'équation de Van der Pol est souvent utilisée pour illustrer de tels phénomènes :

$$x''(t) - \mu\big(1 - x(t)^2\big)x'(t) + x(t) = 0$$

L'étude de cette équation montre qu'il y a en général convergence vers un régime périodique indépendant des conditions initiales, régime que nous allons mettre en évidence à l'aide de quelques exemples.

Dans cet exercice nous allons utiliser exclusivement la fonction `odeint`. On rappelle que pour utiliser cette fonction il faut ramener la résolution de l'équation différentielle d'ordre 2 à la résolution d'un système différentiel d'ordre 1.

a) On commence tout d'abord par fixer les valeurs $\mu = 1$ et $x(0) = 0$. Tracer sur un même graphe les différentes solutions correspondant aux conditions initiales $x'(0) = 0{,}001$, $x'(0) = 0{,}01$, $x'(0) = 0{,}1$ et $x'(0) = 1$ pour $t \in [0,30]$, puis superposer sur une autre figure les différents diagrammes de phase.

b) On fixe maintenant les valeurs $x(0) = 2$ et $x'(0) = 1$. Superposer les tracés obtenus pour $\mu \in \{1,5,10\}$ dans l'intervalle de temps $[0,50]$.

   On peut observer que la période du régime permanent dépend de μ. On admettra que cette période est égale à la différence des abscisses de deux maximums consécutifs. Définir une fonction calculant la liste des maximums de x pour $t \in [0,50]$ puis retournant la valeur moyenne de la période. Tracer alors le graphe représentant la valeur de la période en fonction de μ pour $\mu \in [0,4]$.

c) Lorsque cet oscillateur est excité par un terme harmonique de pulsation ω, l'équation différentielle devient :

$$x''(t) - \mu\big(1 - x(t)^2\big)x'(t) + x(t) = A\sin(2\pi\omega t)$$

   Observer le comportement de cet oscillateur pour $\mu = 8{,}53$, $A = 1{,}2$ et $\omega = 0{,}1$ sur l'intervalle de temps $[0,200]$