Résolution numérique des équations

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Louis-Le-Grand

Résolution numérique des équations

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une application $f : I \to \mathbb{R}$, on cherche à trouver au moins une valeur approchée de $c \in I$ (s'il en existe) tel que

$$f(c) = 0.$$

Toutes les méthodes que nous allons présenter sont itératives et consistent en la construction d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim x_n = c$.

Résolution numérique des équations

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une application $f : I \to \mathbb{R}$, on cherche à trouver au moins une valeur approchée de $c \in I$ (s'il en existe) tel que

$$f(c) = 0.$$

Toutes les méthodes que nous allons présenter sont itératives et consistent en la construction d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim x_n = c$.

Nous verrons que la convergence de ces méthodes itératives dépend en général du choix de la donnée initiale x_0. Ainsi, on ne sait le plus souvent qu'établir des résultats de convergence *locale*, valables lorsque x_0 appartient à un certain voisinage de c.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Une méthode itérative qui fournit en général des suites dont la convergence est d'ordre r sera elle-même dite d'ordre r.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Une méthode itérative qui fournit en général des suites dont la convergence est d'ordre r sera elle-même dite d'ordre r.

La méthode dichotomique est une méthode de résolution numérique d'ordre 1.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Une méthode itérative qui fournit en général des suites dont la convergence est d'ordre r sera elle-même dite d'ordre r.

La méthode dichotomique est une méthode de résolution numérique d'ordre 1.

On a montré que $|x_n - c| \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$. En posant $e_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ on a $\lim \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \dfrac{1}{2}$.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Si $\delta_n = -\log_{10}(e_n)$ on a $\lim \delta_{n+1} - r\delta_n = -\log_{10}(\mu)$.
Si $\delta_n = p$ alors $e_n = 10^{-p}$ et x_n et c ont les mêmes p premières décimales.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Si $\delta_n = -\log_{10}(e_n)$ on a $\lim \delta_{n+1} - r\delta_n = -\log_{10}(\mu)$.
Si $\delta_n = p$ alors $e_n = 10^{-p}$ et x_n et c ont les mêmes p premières décimales.

Si $r = 1$ et $\mu < 1$, $\delta_{n+1} \approx \delta_n - \log_{10}(\mu)$.
Le nombre de décimales exactes augmente linéairement avec n.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Si $\delta_n = -\log_{10}(e_n)$ on a $\lim \delta_{n+1} - r\delta_n = -\log_{10}(\mu)$.
Si $\delta_n = p$ alors $e_n = 10^{-p}$ et x_n et c ont les mêmes p premières décimales.

Si $r = 1$ et $\mu < 1$, $\delta_{n+1} \approx \delta_n - \log_{10}(\mu)$.
Le nombre de décimales exactes augmente linéairement avec n.
À chaque étape le nombre de décimales exactes augmente de $-\log_{10}(\mu)$.

Exemple. Dans le cas de la méthode dichotomique, $\mu = 1/2$ et $-\log_{10}(1/2) \approx 0{,}3$: toutes les trois itérations le nombre de décimales exactes est augmenté de 1.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Si $\delta_n = -\log_{10}(e_n)$ on a $\lim \delta_{n+1} - r\delta_n = -\log_{10}(\mu)$.
Si $\delta_n = p$ alors $e_n = 10^{-p}$ et x_n et c ont les mêmes p premières décimales.

Lorsque $r = 2$, $\delta_{n+1} \approx 2\delta_n$.
À partir d'un certain rang le nombre de décimales est doublé à chaque étape.
Exemple. La méthode de Newton-Raphson est d'ordre 2.

Ordre de convergence d'une méthode itérative

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite c. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c est d'ordre $r \geqslant 1$ lorsqu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant e_n \qquad \lim e_n = 0 \qquad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = \mu > 0.$$

Si $\delta_n = -\log_{10}(e_n)$ on a $\lim \delta_{n+1} - r\delta_n = -\log_{10}(\mu)$.
Si $\delta_n = p$ alors $e_n = 10^{-p}$ et x_n et c ont les mêmes p premières décimales.

Lorsque $r = 2$, $\delta_{n+1} \approx 2\delta_n$.
À partir d'un certain rang le nombre de décimales est doublé à chaque étape.
Exemple. La méthode de Newton-Raphson est d'ordre 2.

Lorsque $r > 1$ le nombre de décimales exactes est à partir d'un certain rang multiplié par r à chaque étape.

Critères d'arrêt

En cas de convergence le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par une méthode itérative converge vers c. Pour l'utilisation pratique d'une telle méthode il faut introduire un critère d'arrêt pour interrompre le processus itératif lorsque l'approximation de c par x_n est jugée « satisfaisante ».
Pour cela, plusieurs choix sont possibles :

Critères d'arrêt

En cas de convergence le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par une méthode itérative converge vers c. Pour l'utilisation pratique d'une telle méthode il faut introduire un critère d'arrêt pour interrompre le processus itératif lorsque l'approximation de c par x_n est jugée « satisfaisante ».
Pour cela, plusieurs choix sont possibles :

- on peut imposer un nombre maximal d'itérations ;

Critères d'arrêt

En cas de convergence le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par une méthode itérative converge vers c. Pour l'utilisation pratique d'une telle méthode il faut introduire un critère d'arrêt pour interrompre le processus itératif lorsque l'approximation de c par x_n est jugée « satisfaisante ».

Pour cela, plusieurs choix sont possibles :

- on peut imposer un nombre maximal d'itérations ;
- on peut imposer une tolérance $\varepsilon > 0$ sur l'incrément : $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$;

Critères d'arrêt

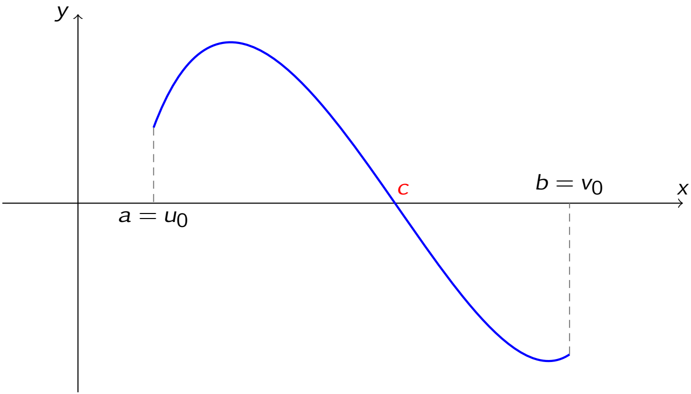
En cas de convergence le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par une méthode itérative converge vers c. Pour l'utilisation pratique d'une telle méthode il faut introduire un critère d'arrêt pour interrompre le processus itératif lorsque l'approximation de c par x_n est jugée « satisfaisante ».

Pour cela, plusieurs choix sont possibles :

- on peut imposer un nombre maximal d'itérations ;
- on peut imposer une tolérance $\varepsilon > 0$ sur l'incrément : $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$;
- on peut imposer une tolérance $\varepsilon > 0$ sur le résidu : $|f(x_n)| \leqslant \varepsilon$.

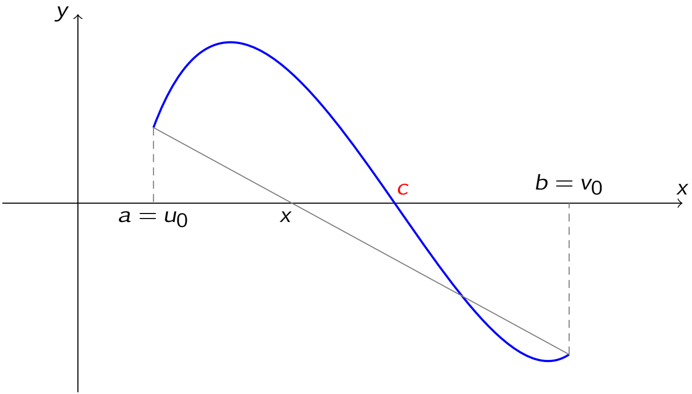
Méthode de la fausse position

Il s'agit d'une méthode d'encadrement de c. On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(a)f(b) \leqslant 0$, ce qui assure l'existence d'un zéro au moins dans l'intervalle $]a,b[$.



Méthode de la fausse position

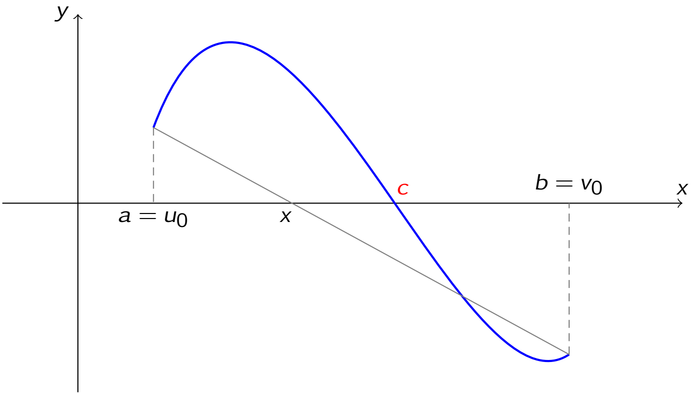
Au lieu de poursuivre avec le milieu de $[a, b]$ (méthode dichotomique) on considère l'intersection de la corde et de l'axe des abscisses.



Méthode de la fausse position

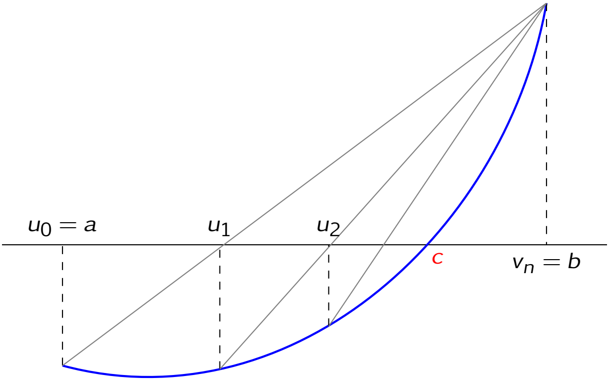
Au lieu de poursuivre avec le milieu de $[a, b]$ (méthode dichotomique) on considère l'intersection de la corde et de l'axe des abscisses.

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} (u_n, x_n) & \text{si } f(u_n)f(x_n) \leqslant 0 \\ (x_n, v_n) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } x_n = \frac{u_n f(v_n) - v_n f(u_n)}{f(v_n) - f(u_n)}$$



Méthode de la fausse position

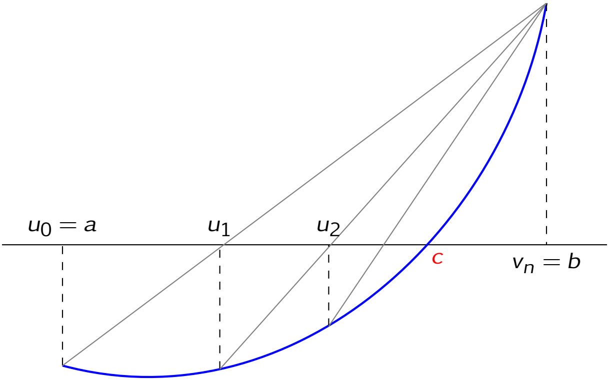
La quantité $v_n - u_n$ décroit mais ne tend pas forcément vers 0. C'est le cas en particulier lorsque la fonction est convexe ou concave.



L'une des deux bornes reste constante alors que l'autre converge de façon monotone vers c.

Méthode de la fausse position

La quantité $v_n - u_n$ décroit mais ne tend pas forcément vers 0. C'est le cas en particulier lorsque la fonction est convexe ou concave.



Le critère d'arrêt doit être basé sur la valeur du résidu $f(x_n)$: puisque x_n converge vers c et que f est continue, $\lim f(x_n) = 0$.

Méthode de la fausse position

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et strictement convexe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la fausse position converge linéairement vers l'unique zéro c de f.

Méthode de la fausse position

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et strictement convexe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la fausse position converge linéairement vers l'unique zéro c de f.

- La corde est située au dessus du graphe donc $f(x_n) < 0$. Ainsi, $u_{n+1} = x_n$ et $v_{n+1} = v_n$.

Méthode de la fausse position

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et strictement convexe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la fausse position converge linéairement vers l'unique zéro c de f.

- La corde est située au dessus du graphe donc $f(x_n) < 0$. Ainsi, $u_{n+1} = x_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b, donc converge vers une limite c.

Méthode de la fausse position

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et strictement convexe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la fausse position converge linéairement vers l'unique zéro c de f.

- La corde est située au dessus du graphe donc $f(x_n) < 0$. Ainsi, $u_{n+1} = x_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b, donc converge vers une limite c.
- $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \mapsto \dfrac{xf(b) - bf(x)}{f(b) - f(x)} = x - f(x)\dfrac{b - x}{f(b) - f(x)}$ donc $c = g(c)$, ce qui implique $f(c) = 0$.

Méthode de la fausse position

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et strictement convexe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la fausse position converge linéairement vers l'unique zéro c de f.

- La corde est située au dessus du graphe donc $f(x_n) < 0$. Ainsi, $u_{n+1} = x_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b, donc converge vers une limite c.
- $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \mapsto \dfrac{xf(b) - bf(x)}{f(b) - f(x)} = x - f(x)\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}$ donc $c = g(c)$, ce qui implique $f(c) = 0$.
- On a $\dfrac{u_{n+1} - c}{u_n - c} = \dfrac{g(u_n) - g(c)}{u_n - c}$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1} - c}{u_n - c} = g'(c)$.

Méthode de la fausse position

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et strictement convexe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la fausse position converge linéairement vers l'unique zéro c de f.

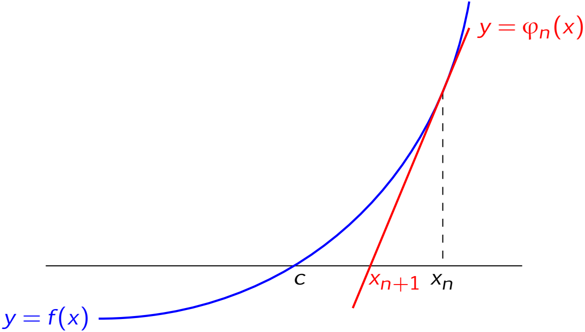
- La corde est située au dessus du graphe donc $f(x_n) < 0$. Ainsi, $u_{n+1} = x_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b, donc converge vers une limite c.
- $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \mapsto \dfrac{xf(b) - bf(x)}{f(b) - f(x)} = x - f(x)\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}$ donc $c = g(c)$, ce qui implique $f(c) = 0$.
- On a $\dfrac{u_{n+1} - c}{u_n - c} = \dfrac{g(u_n) - g(c)}{u_n - c}$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1} - c}{u_n - c} = g'(c)$.
- On calcule $g'(x) = f(b)\dfrac{f(b) - f(x) - (b-x)f'(x)}{(f(b)-f(x))^2}$ donc

  $$g'(c) = \frac{f(b) - (b-c)f'(c)}{f(b)}.$$

  Le graphe est situé au dessus de la tangente en c donc $f(b) > f(c) + (b-c)f'(c) = (b-c)f'(c)$, ce qui montre que $g'(c) > 0$.

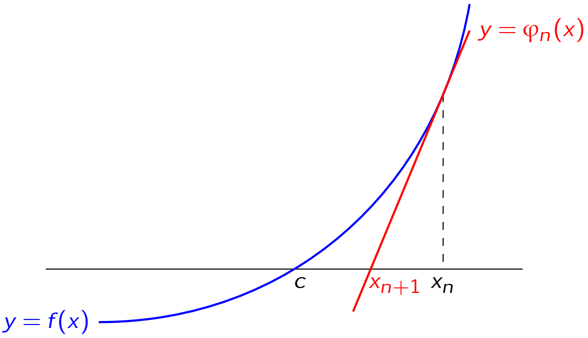
Méthode de Newton-Raphson

On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en remplaçant l'equation $f(x) = 0$ par l'équation affine $\varphi_{x_n}(x_{n+1}) = 0$, où φ_{x_n} est l'équation de la tangente à f en x_n.



Méthode de Newton-Raphson

On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en remplaçant l'equation $f(x) = 0$ par l'équation affine $\varphi_{x_n}(x_{n+1}) = 0$, où φ_{x_n} est l'équation de la tangente à f en x_n.



La tangente a pour équation $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ donc :

$$\varphi_n(x_{n+1}) = 0 \iff x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Méthode de Newton-Raphson

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ définie au voisinage d'un point c pour lequel $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel, quel que soit $x_0 \in \mathscr{V}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. En outre, la convergence est quadratique.

Méthode de Newton-Raphson

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ définie au voisinage d'un point c pour lequel $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel, quel que soit $x_0 \in \mathscr{V}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. En outre, la convergence est quadratique.

On suppose $f'(c) > 0$. f est strictement croissante au voisinage de c donc il existe un intervalle $[a, b]$ sur lequel $f' > 0$ et pour lequel $f(a) < 0 < f(b)$.

Méthode de Newton-Raphson

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ définie au voisinage d'un point c pour lequel $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel, quel que soit $x_0 \in \mathscr{V}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. En outre, la convergence est quadratique.

On suppose $f'(c) > 0$. f est strictement croissante au voisinage de c donc il existe un intervalle $[a, b]$ sur lequel $f' > 0$ et pour lequel $f(a) < 0 < f(b)$.

Posons $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$.

Alors $\varphi(x) - c = x - c - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - c - \dfrac{f(x) - f(c)}{f'(x)} = \dfrac{f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)}{f'(x)}$.

Méthode de Newton-Raphson

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ définie au voisinage d'un point c pour lequel $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel, quel que soit $x_0 \in \mathscr{V}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. En outre, la convergence est quadratique.

On suppose $f'(c) > 0$. f est strictement croissante au voisinage de c donc il existe un intervalle $[a, b]$ sur lequel $f' > 0$ et pour lequel $f(a) < 0 < f(b)$.

Posons $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$.

Alors $\varphi(x) - c = x - c - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - c - \dfrac{f(x) - f(c)}{f'(x)} = \dfrac{f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)}{f'(x)}$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)| \leqslant \dfrac{M_2}{2}(c - x)^2$

donc : $|\varphi(x) - c| \leqslant \dfrac{M_2}{2m_1}(x - c)^2 = K(x - c)^2$.

Méthode de Newton-Raphson

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ définie au voisinage d'un point c pour lequel $f(c)=0$ et $f'(c)\neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel, quel que soit $x_0\in\mathscr{V}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. En outre, la convergence est quadratique.

On suppose $f'(c)>0$. f est strictement croissante au voisinage de c donc il existe un intervalle $[a,b]$ sur lequel $f'>0$ et pour lequel $f(a)<0<f(b)$.

Posons $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f(x)=0 \iff \varphi(x)=x$.

Alors $\varphi(x)-c=x-c-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=x-c-\dfrac{f(x)-f(c)}{f'(x)}=\dfrac{f(c)-f(x)-(c-x)f'(x)}{f'(x)}$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|f(c)-f(x)-(c-x)f'(x)|\leqslant\dfrac{M_2}{2}(c-x)^2$

donc : $|\varphi(x)-c|\leqslant\dfrac{M_2}{2m_1}(x-c)^2=K(x-c)^2$.

Choisissons $\eta>0$ assez petit pour que $K\eta<1$ et $[c-\eta,c+\eta]\subset[a,b]$.
Alors $x_0\in[c-\eta,c+\eta]\Longrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\in[c-\eta,c+\eta]$.

De plus, $|x_{n+1}-c|\leqslant K(x_n-c)^2$ et (récurrence) : $|x_n-c|\leqslant\dfrac{1}{K}(K|x_0-c|)^{2^n}$.

Puisque $K|x_0-c|\leqslant K\eta<1$ ceci montre que $\lim x_n=c$.

Méthode de Newton-Raphson

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ définie au voisinage d'un point c pour lequel $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel, quel que soit $x_0 \in \mathscr{V}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. En outre, la convergence est quadratique.

On suppose $f'(c) > 0$. f est strictement croissante au voisinage de c donc il existe un intervalle $[a, b]$ sur lequel $f' > 0$ et pour lequel $f(a) < 0 < f(b)$.

Posons $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$.

Alors $\varphi(x) - c = x - c - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - c - \dfrac{f(x) - f(c)}{f'(x)} = \dfrac{f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)}{f'(x)}$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)| \leqslant \dfrac{M_2}{2}(c - x)^2$

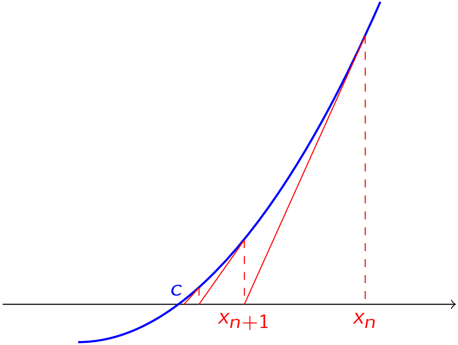
donc : $|\varphi(x) - c| \leqslant \dfrac{M_2}{2m_1}(x - c)^2 = K(x - c)^2$.

En posant $e_n = \dfrac{1}{K}(K|x_0 - c|)^{2^n}$ on a $\lim \dfrac{e_{n+1}}{e_n^2} = K > 0$ donc la convergence est quadratique.

Méthode de Newton-Raphson

Cas d'une fonction convexe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et convexe, telle que $f(a) < 0 < f(b)$. Si $f(x_0) > 0$, la suite (x_n) est définie et converge vers l'unique zéro c de f sur $]a,b[$.



La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0.

Méthode de Newton-Raphson

Cas d'une fonction convexe

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et convexe, telle que $f(a) < 0 < f(b)$. Si $f(x_0) > 0$, la suite (x_n) est définie et converge vers l'unique zéro c de f sur $]a, b[$.

Le graphe situé au dessus de ses tangentes, donc si $c < x_n < b$ alors $c < x_{n+1} < x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par le choix d'une valeur x_0 vérifiant $c < x_0 < b$ et cette suite est décroissante et minorée par c.

Elle possède donc une limite qui est un point fixe de la fonction φ. Mais $\varphi(x) = x \iff f(x) = 0$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Méthode de Newton-Raphson

Cas d'une fonction convexe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et convexe, telle que $f(a) < 0 < f(b)$. Si $f(x_0) > 0$, la suite (x_n) est définie et converge vers l'unique zéro c de f sur $]a,b[$.

Le graphe situé au dessus de ses tangentes, donc si $c < x_n < b$ alors $c < x_{n+1} < x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par le choix d'une valeur x_0 vérifiant $c < x_0 < b$ et cette suite est décroissante et minorée par c.

Elle possède donc une limite qui est un point fixe de la fonction φ. Mais $\varphi(x) = x \iff f(x) = 0$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Application : calcul d'une racine carrée par la méthode de Héron.
On applique la méthode de Newton-Raphson à la fonction $f : x \mapsto x^2 - \alpha$ à partir de la valeur initiale $x_0 = \alpha + 1$:

$$x_0 = \alpha + 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\Big)$$

Dérivée numérique

Nous allons partir d'une idée simple : approcher $f'(x)$ par la quantité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

On utilise une représentation décimale à trois chiffres significatifs et que l'on souhaite calculer une valeur approchée de $f'(7)$ avec $f : x \mapsto x^2$.

Dérivée numérique

Nous allons partir d'une idée simple : approcher $f'(x)$ par la quantité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

On utilise une représentation décimale à trois chiffres significatifs et que l'on souhaite calculer une valeur approchée de $f'(7)$ avec $f : x \mapsto x^2$.

- Si on prend $h = 0{,}1$ on approche $f'(7) = 14$ par :

$$\frac{7{,}1^2 - 7^2}{0{,}1} = \frac{50{,}4 - 49}{0{,}1} = \frac{1{,}4}{0{,}1} = 14{,}0 \qquad \text{car } 7{,}1^2 = 50{,}41.$$

Dérivée numérique

Nous allons partir d'une idée simple : approcher $f'(x)$ par la quantité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

On utilise une représentation décimale à trois chiffres significatifs et que l'on souhaite calculer une valeur approchée de $f'(7)$ avec $f : x \mapsto x^2$.

- Si on prend $h = 0{,}1$ on approche $f'(7) = 14$ par :

$$\frac{7{,}1^2 - 7^2}{0{,}1} = \frac{50{,}4 - 49}{0{,}1} = \frac{1{,}4}{0{,}1} = 14{,}0 \qquad \text{car } 7{,}1^2 = 50{,}41.$$

- Si on prend $h = 0{,}01$ on approche $f'(7) = 14$ par :

$$\frac{7{,}01^2 - 7^2}{0{,}01} = \frac{49{,}1 - 49}{0{,}01} = \frac{0{,}1}{0{,}01} = 10{,}0 \qquad \text{car } 7{,}01^2 = 49{,}1401.$$

Pour choisir la valeur optimale de h il faut tenir compte de la représentation des nombres en machine.

Dérivée numérique

Nous allons partir d'une idée simple : approcher $f'(x)$ par la quantité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Posons $\varepsilon = 2^{-52}$ (précision relative de la machine). L'erreur absolue sur $f(x)$ vaut $\varepsilon|f(x)|$; l'erreur sur le numérateur vaut donc :

$$\varepsilon|f(x+h)|+\varepsilon|f(x)| \approx 2\varepsilon|f(x)|.$$

Erreur de calcul sur le quotient : $2\varepsilon\left|\dfrac{f(x)}{h}\right|$.

Dérivée numérique

Nous allons partir d'une idée simple : approcher $f'(x)$ par la quantité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Posons $\varepsilon = 2^{-52}$ (précision relative de la machine). L'erreur absolue sur $f(x)$ vaut $\varepsilon|f(x)|$; l'erreur sur le numérateur vaut donc :

$$\varepsilon|f(x+h)| + \varepsilon|f(x)| \approx 2\varepsilon|f(x)|.$$

Erreur de calcul sur le quotient : $2\varepsilon\left|\frac{f(x)}{h}\right|$.

Erreur mathématique : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \mathrm{o}(h^2)$ donc $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \sim \frac{|h|}{2}|f''(x)|$.

Dérivée numérique

Nous allons partir d'une idée simple : approcher $f'(x)$ par la quantité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Posons $\varepsilon = 2^{-52}$ (précision relative de la machine). L'erreur absolue sur $f(x)$ vaut $\varepsilon|f(x)|$; l'erreur sur le numérateur vaut donc :

$$\varepsilon|f(x+h)|+\varepsilon|f(x)| \approx 2\varepsilon|f(x)|.$$

Erreur de calcul sur le quotient : $2\varepsilon\left|\dfrac{f(x)}{h}\right|$.

Erreur mathématique : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x) + \mathrm{o}(h^2)$ donc $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \sim \dfrac{|h|}{2}|f''(x)|$.

Erreur totale : $E(h) = 2\varepsilon\dfrac{|f(x)|}{|h|} + \dfrac{|h|}{2}|f''(x)|$.

Dérivée numérique

Erreur totale : $E(h) = 2\varepsilon\dfrac{|f(x)|}{|h|} + \dfrac{|h|}{2}|f''(x)|$.

Avec $h_0 = 2\sqrt{\varepsilon\dfrac{|f(x)|}{|f''(x)|}}$ on dipose des variations :

h	0		h_0		$+\infty$
$E'(h)$		$-$	0	$+$	
$E(h)$	$+\infty$	$\searrow$	$E(h_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

On choisit en général $h \approx \sqrt{\varepsilon}$ soit $h = 10^{-8}$.

Dérivée numérique

Amélioration de l'erreur mathématique

On approche $f'(x)$ par la quantité $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

Dérivée numérique

Amélioration de l'erreur mathématique

On approche $f'(x)$ par la quantité $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \mathrm{o}(h^2)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \mathrm{o}(h^2)$$

donc $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - f'(x)\right| \sim \dfrac{h^2}{3}|f^{(3)}(x)|$ et l'erreur totale d'approximation vaut :

$$E(h) = 2\varepsilon\frac{|f(x)|}{|h|} + \frac{h^2}{3}|f^{(3)}(x)|$$

Dérivée numérique

Amélioration de l'erreur mathématique

On approche $f'(x)$ par la quantité $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \mathrm{o}(h^2)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \mathrm{o}(h^2)$$

donc $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - f'(x)\right| \sim \dfrac{h^2}{3}|f^{(3)}(x)|$ et l'erreur totale d'approximation vaut :

$$E(h) = 2\varepsilon\frac{|f(x)|}{|h|} + \frac{h^2}{3}|f^{(3)}(x)|$$

L'erreur est minimale pour $h_0 = \sqrt[3]{\dfrac{3\varepsilon|f(x)|}{|f^{(3)}(x)|}}$.

On choisit en général $h \approx \sqrt[3]{\varepsilon}$ soit $h = 10^{-5}$.

Méthode de la sécante

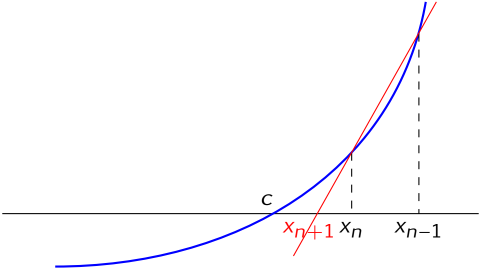
Une autre possibilité est de remplacer la dérivée par la pente de la corde reliant les points d'abscisses x_{n-1} et x_{n-2} :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{est remplacé par } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

Méthode de la sécante

Une autre possibilité est de remplacer la dérivée par la pente de la corde reliant les points d'abscisses x_{n-1} et x_{n-2} :

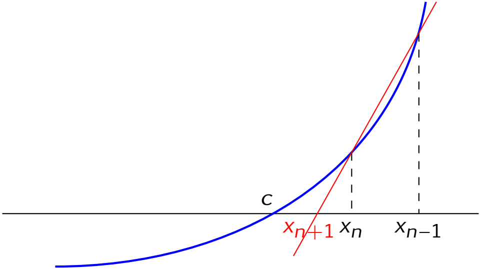
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{est remplacé par } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Méthode de la sécante

Une autre possibilité est de remplacer la dérivée par la pente de la corde reliant les points d'abscisses x_{n-1} et x_{n-2} :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{est remplacé par } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de c vérifiant $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de c pour lequel si $(x_0, x_1) \in \mathscr{V}^2$ alors (x_n) converge vers c. En outre, la convergence est d'ordre φ avec $\varphi \approx 1{,}618$.

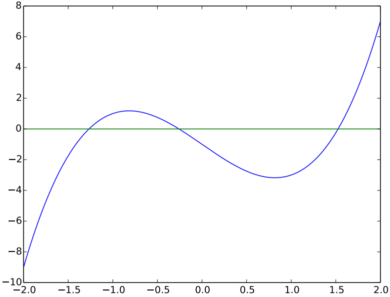
Utilisation du module scipy.optimize

La fonction newton de ce module applique la méthode de Newton-Raphson.

```
newton(func, x0, fprime=None, tol=1.48e-08, maxiter=50)
    Find a zero using the Newton-Raphson or secant method.

    Find a zero of the function func given a nearby starting point x0.
    The Newton-Raphson method is used if the derivative fprime of func
    is provided, otherwise the secant method is used.

    Parameters
    ----------
    func : function
        The function whose zero is wanted.
    x0 : float
        An initial estimate of the zero that should be somewhere near the
        actual zero.
    fprime : function, optional
        The derivative of the function when available and convenient. If it
        is None (default), then the secant method is used.
    tol : float, optional
        The allowable error of the zero value.
    maxiter : int, optional
        Maximum number of iterations.

    Returns
    -------
    zero : float
        Estimated location where function is zero.
```

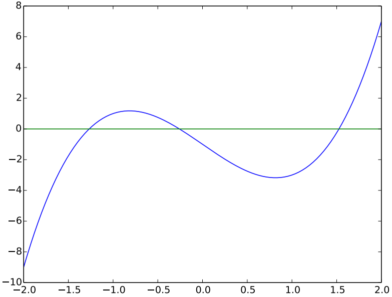
Utilisation du module scipy.optimize

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 4x - 1$.



Utilisation du module scipy.optimize

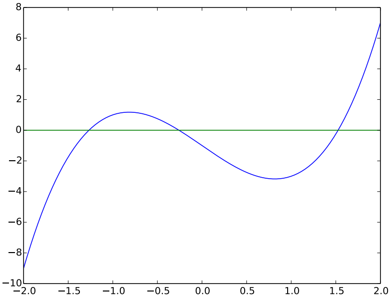
On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 4x - 1$.




```
>>> def f(x): return 2 * x**3 - 4 * x - 1
>>> def df(x): return 6 * x**2 - 4

>>> newton(f, -1, df)
-1.2670350983613659
```

Utilisation du module scipy.optimize

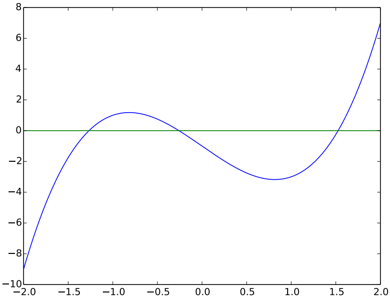
On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 4x - 1$.




```
>>> newton(f, 0, df)
-0.25865202250415276

>>> newton(f, 1, df)
1.525687120865185
```

Utilisation du module scipy.optimize

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 4x - 1$.



Si on omet de préciser la valeur de la dérivée, c'est la méthode de la sécante qui est appliquée :

```
>>> newton(f, 0)
-0.2586520225041522
```

Utilisation du module scipy.optimize

Le paramètre `maxiter` permet d'éviter certains cas de divergence :

```
>>> def f(x): return x**3 - 2 * x + 2
>>> def df(x): return 3 * x**2 - 2

>>> newton(f, 0, df)
RuntimeError: Failed to converge after 50 iterations, value is 0.0
```

Dans l'exemple ci-dessus, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscille indéfiniment entre les deux valeurs 0 et 1.