Points fixes de fonctions à domaine fini (X mp 2013)

Durée : 2 heures

Dans ce problème on s'intéresse aux points fixes des fonctions $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, où E est un ensemble fini. Le calcul effectif et efficace des points fixes de telles fonctions est un problème récurrent en informatique (transformation d'automates, vérification automatique de programmes, algorithmique des graphes, etc) et admet différentes approches selon la structure de E et les propriétés de f.

On suppose par la suite un entier $n > 0$ fixé et on pose $\mathrm{E}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On représente une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ par un tableau `t` de taille n, autrement dit $f(x) = $ `t[x]` pour tout $x = 0, 1, \ldots, n-1$. Ainsi, la fonction f_0 qui à $x \in \mathrm{E}_{10}$ associe $2x+1$ modulo 10 est-elle représentée par le tableau :

t[0]	t[1]	t[2]	t[3]	t[4]	t[5]	t[6]	t[7]	t[8]	t[9]
1	3	5	7	9	1	3	5	7	9

Toutes les fonctions demandées devront être écrites en Python.

Partie I. Recherche de point fixe, cas général

On rappelle que x est un *point fixe* de la fonction f si et seulement si $f(x) = x$.

Question 1. Écrire une fonction `admet_point_fixe(t)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n et renvoie `True` si la fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ représentée par `t` admet un point fixe, `False` sinon. Par exemple, `admet_point_fixe` devra renvoyer `True` pour le tableau donné en introduction, puisque 9 est un point fixe de la fonction f_0 qui à x associe $2x+1$ modulo 10.

Question 2. Écrire une fonction `nb_points_fixes(t)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n et renvoie le nombre de points fixes de la fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ représentée par `t`. Par exemple, `nb_points_fixes` devra renvoyer 1 pour le tableau donné en introduction, puisque 9 est le seul point fixe de f_0.

On note f^k l'itérée k-ième de f, autrement dit $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Question 3. Écrire une fonction `itere(t, x, k)` qui prend en premier argument un tableau `t` de taille n représentant une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$, en deuxième et troisième arguments des entiers x et k de E_n, et renvoie $f^k(x)$.

Question 4. Écrire une fonction `nb_points_fixes_iteres(t, k)` qui prend en premier argument un tableau `t` de taille n représentant une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$, en deuxième argument un entier $k \geqslant 0$, et renvoie le nombre de points fixes de f^k.

Un élément $z \in \mathrm{E}_n$ est dit *attracteur principal* de $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ si et seulement si z est un point fixe de f, et pour tout $x \in \mathrm{E}_n$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $f^k(x) = z$.

Afin d'illustrer cette notion, on pourra vérifier que la fonction f_1 représentée par le tableau ci-dessous admet 2 comme attracteur principal.

t[0]	t[1]	t[2]	t[3]	t[4]	t[5]	t[6]
5	5	2	2	0	2	2

En revanche, on notera que la fonction f_0 donnée en introduction n'admet pas d'attracteur principal, puisque $f_0^k(0) \neq 9$ quel que soit l'entier $k \geqslant 0$.

Question 5. Écrire une fonction `admet_attracteur_principal(t)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n et renvoie `True` si et seulement si la fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ représentée par `t` admet un attracteur principal, `False` sinon. On ne requiert pas ici une solution efficace.

On suppose aux questions 6 et 7 que f admet un attracteur principal. Le *temps de convergence* de f en $x \in \mathrm{E}_n$ est le plus petit entier $k \geqslant 0$ tel que $f^k(x)$ soit un point fixe de f. Pour la fonction f_1 ci-dessus, le temps de convergence en 4 est égal à 3. En effet, $f_1(4) = 0$, $f_1^2(4) = 5$, $f_1^3(4) = 2$ et 2 est un point fixe de f_1. On note $\mathrm{tc}(f, x)$ le temps de convergence de f en x.

Question 6. Écrire une fonction `temps_de_convergence(t, x)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n représentant une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ qui admet un attracteur principal, en deuxième argument un entier x de E_n, et renvoie le temps de convergence de f en x. On pourra admettre que $\mathrm{tc}(f, x) = 0$ si x est un point fixe de f, et $1 + \mathrm{tc}(f, f(x))$ si x n'est pas un point fixe de f.

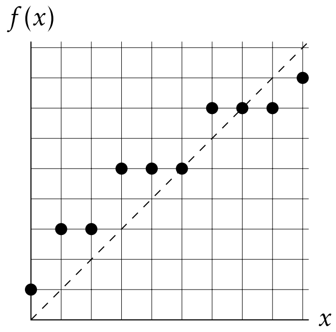
Question 7. Écrire une fonction `temps_de_convergence_max(t)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n représentant une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ qui admet un attracteur principal et renvoie $\max\limits_{i=0\cdots n-1} \mathrm{tc}(f, i)$. On impose un temps de calcul <u>linéaire</u> en la taille n du tableau. À titre d'indication, on pourra au besoin créer un deuxième tableau qui servira d'intermédiaire au cours du calcul. On ne demande pas de démonstration du fait que le temps de calcul de la solution proposée est linéaire.

Partie II. Recherche efficace de points fixes

Toute fonction `point_fixe(t)` retournant un point fixe d'une fonction arbitraire est de complexité au mieux linéaire en n. On s'intéresse maintenant à des améliorations possibles de cette complexité lorsque le fonction considérée possède certaines propriétés spécifiques. Nous examinons deux cas.

Premier cas.

Le premier cas que nous considérons est celui d'une fonction croissante de E_n dans E_n. On rappelle qu'une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ est croissante si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}_n^2$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
On admet qu'une fonction croissante de E_n dans E_n admet toujours un point fixe.
À titre d'exemple, la fonction dont le tableau et le graphe sont donnés ci-dessous est croissante. Elle a deux points fixes, à savoir les entiers 5 et 7.



1	3	3	5	5	5	7	7	7	8
`t[0]`	`t[1]`	`t[2]`	`t[3]`	`t[4]`	`t[5]`	`t[6]`	`t[7]`	`t[8]`	`t[9]`

Question 8. Ecrire une fonction `est_croissante(t)` qui prend en argument un tableau `t` et renvoie `True` si la fonction représentée par `t` est croissante, `False` sinon. On impose un temps de calcul <u>linéaire</u> en la taille n du tableau. On ne demande pas de démonstration du fait que le temps de calcul de la solution proposée est linéaire.

Question 9. Ecrire une fonction `point_fixe(t)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n représentant une fonction croissante $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ et retourne un entier $x \in \mathrm{E}_n$ tel que $f(x) = x$. On impose un temps de calcul <u>logarithmique</u> en la taille n du tableau. On ne demande pas ici de démonstration du fait que le temps de calcul de la solution proposée est logarithmique, ceci étant le sujet de la question suivante.

Question 10. Démontrer que la fonction de la question 9 se termine, puis justifier que le temps de calcul est logarithmique en la taille n du tableau.

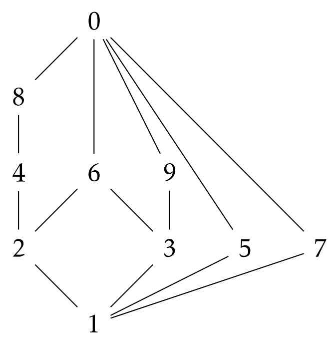
Deuxième cas

On peut généraliser la notion de fonction croissante comme suit. On rappelle qu'une relation binaire $\preccurlyeq$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive ($x \preccurlyeq x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$), anti-symétrique (pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ alors $x = y$) et transitive (pour tout $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$, si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$ alors $x \preccurlyeq z$). Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.
Une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est *croissante au sens de* $\preccurlyeq$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $x \preccurlyeq y$ implique $f(x) \preccurlyeq f(y)$.
Ceci généralise la notion de fonction croissante de E_n dans E_n, que l'on retrouve en prenant $\mathrm{E} = \mathrm{E}_n$ et $\preccurlyeq$ la relation d'ordre $\leqslant$. On s'intéresse dorénavant à d'autres relations d'ordre sur E_n.

On dit qu'un élément m de E est un *plus petit élément* de E au sens de $\preccurlyeq$ si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{E}$, $m \preccurlyeq x$. On admet que pour tout ensemble fini E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ et qui admet un plus petit élément m au sens de $\preccurlyeq$, pour toute fonction croissante $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ au sens de $\preccurlyeq$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $f^k(m)$ soit un point fixe de f dans E.

Question 11. Soit E un ensemble fini quelconque muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ et admettant un plus petit élément m au sens de $\preccurlyeq$. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une fonction croissante au sens de $\preccurlyeq$, et soit $k \geqslant 0$ un entier tel que $f^k(m)$ soit un point fixe de f dans E. Démontrer que $f^k(m)$ est en fait le plus petit point fixe de f au sens de $\preccurlyeq$, autrement dit que pour tout autre point fixe x de f dans E on a $f^k(m) \preccurlyeq x$.

Nous nous intéressons maintenant à un choix particulier d'ordre $\preccurlyeq$, appelé *ordre de divisibilité* et note $|$. Précisément, on note $a \mid b$ la relation d'ordre « a divise b » sur les entiers positifs, vraie si et seulement s'il existe un entier $c \geqslant 0$ tel que $ca = b$. Ainsi, l'ensemble E_{10} ordonné par divisibilité peut se représenter graphiquement comme suit.



D'après la définition donnée précédemment, une fonction $f : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n$ *croissante au sens de l'ordre de divisibilité* est une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}_n^2$, si $x \mid y$ alors $f(x) \mid f(y)$. Par exemple, la fonction représentée par le tableau ci-dessous est croissante au sens de l'ordre de divisibilité.

0	2	4	6	4	8	0	2	0	6
`t[0]`	`t[1]`	`t[2]`	`t[3]`	`t[4]`	`t[5]`	`t[6]`	`t[7]`	`t[8]`	`t[9]`

On remarque que, par la question 11, toute fonction de E_n dans E_n croissante au sens de l'ordre de divisibilité a un plus petit point fixe au sens de l'ordre de divisibilité.

On rappelle que le pgcd de deux entiers $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$ est le plus grand entier non nul qui divise x et y. On étend cette définition à des entiers naturels quelconques, en convenant de définir le pgcd d'un entier $x \geqslant 0$ et de 0 comme valant x.

Question 12. Soit f une fonction de E_n dans E_n, croissante au sens de l'ordre de divisibilité, et notons $x_1, \ldots, x_m$ les points fixes de f dans E_n. Montrer que le plus petit point fixe de f au sens de l'ordre de divisibilité est exactement le pgcd de $x_1, \ldots, x_m$.

Question 13. Ecrire une fonction `pgcd_points_fixes(t)` qui prend en argument un tableau `t` de taille n représentant une fonction de E_n dans E_n croissante au sens de la divisibilité, et renvoie le pgcd de ses points fixes. On impose un temps de calcul <u>logarithmique</u> en la taille n du tableau. On ne demande pas ici de démonstration du fait que le temps de calcul de la solution proposée est logarithmique, ceci étant le sujet de la question qui suit.

Question 14. Justifier que la fonction de la question 13 a un temps de calcul logarithmique en la taille n du tableau.

♦ ♦
♦