Images en gris (X psi 2011)

Durée : 2 heures

Image A

Les ordinateurs et de nombreux dispositifs électroniques (caméras numériques, écrans, etc.) représentent les images comme des matrices de nombres entiers. Dans ce problème, on se limite aux images rectangulaires en teintes de gris.

En machine, une telle image est la donnée d'une hauteur h, d'une largeur l, et d'une matrice M d'entiers de h lignes et l colonnes. L'image est divisée en éléments ou pixels définis par leurs numéros de ligne i et de colonne j. Chaque entier de la matrice définit le ton de gris associé au pixel de coordonnées (i, j). Ce ton varie entre zéro, qui rend l'absence de lumière et donc le noir, et une valeur maximale dite profondeur p qui rend le blanc. Les valeurs intermédiaires rendent diverses teintes de gris de plus en plus claires. On notera que le pixel de coordonnées $(0, 0)$ est conventionnellement situé en haut et à gauche de l'image.

Par exemple, pour l'image ci-dessous :

une échelle de 16 teintes de gris allant du noir au blanc, on a $h = 1$, $l = 16$, $p = 15$ et M ne possède qu'une seule ligne qui contient 16 entiers de 0 à 15 en ordre croissant.

On suppose définie une classe `Image` permettant de représenter en Python des images en teintes de gris. On crée une image par l'appel de la primitive `Image(h, l, p)`. On accède aux composants d'une image `img` par les attributs `img.h` (hauteur), `img.l` (largeur), `img.p` (profondeur) et `img.m` (matrice). On accède aux éléments de la matrice par la notation `img.m[i, j]` étant entendu que les indices commencent à zéro (un indice de ligne est donc un entier i compris entre 0 et $h - 1$ au sens large, tandis qu'un indice de colonne est un entier j compris entre 0 et $l - 1$ au sens large).

Partie I. Opérations élémentaires

Image B

Image C

Image D

Image E

Figure 1 – Opérations élémentaires.

Question 1. Écrire une fonction `inverser(img)` qui renvoie l'image inverse de l'image `img`, c'est-à-dire que le ton d'un pixel de la nouvelle image est $p - v$ où v est le ton du pixel correspondant de l'image d'origine. Par exemple, l'image B de la figure 1 résulte de l'application de `inverser` à l'image A de l'introduction.

Question 2. Écrire une fonction `flipH(img)` qui renvoie la transformée de l'image `img` par la symétrie d'axe vertical passant par le milieu de l'image. Par exemple, l'image C de la figure 1 résulte de l'application de `flipH` à l'image A de l'introduction.

Question 3. Écrire une fonction `poserV(img1, img2)` qui prend en arguments deux images `img1` et `img2` de même largeur et profondeur, et qui renvoie la nouvelle image obtenue en posant `img1` sur `img2`. Par exemple, l'image D de la figure 1 résulte de l'application de `poserV` aux images B et C.

Question 4. Écrire une fonction `poserH(img1, img2)` qui prend en arguments deux images `img1` et `img2` de même hauteur et profondeur, et qui renvoie la nouvelle image obtenue en posant `img2` à droite de `img1`. Par exemple, l'image E de la figure 1 résulte de l'application de `poserH` aux images B et C.

Partie II. Transferts

Certaines transformations des images sont simplement l'application d'une fonction aux tons, dont on rappelle qu'ils sont des entiers compris entre 0 et p (profondeur de l'image) au sens large. Une telle fonction de transfert peut s'appliquer vers des images dont la profondeur n'est pas nécessairement p, mais une nouvelle profondeur q. Une fonction de transfert est représentée par la donnée de la profondeur cible q et d'un tableau d'entiers t de taille $p+1$, dont les cases contiennent des entiers entre 0 et q au sens large.

Question 5. Écrire une fonction `transferer(img, q, t)` qui prend en arguments une image `img`, ainsi qu'une fonction de transfert donnée par un entier q et un tableau d'entiers t. La fonction `transferer` renvoie une nouvelle image, de même taille que `img`, de nouvelle profondeur q et dont chaque pixel `(i, j)` a pour ton `t[img.m[i, j]]`.

Question 6. Écrire une nouvelle fonction `inverser` (Question 1) qui utilise la fonction `transferer` de la question précédente.


Image A


Image F


Image G


Image H


Image I

Figure 2 – Transferts.

L'histogramme d'une image de profondeur p est un tableau h_i d'entiers de taille $p+1$ tel que $h_i[v]$ compte le nombre de pixels de l'image dont le ton est v.

Question 7. Écrire une fonction `histogramme(img)` qui prend en argument une image `img` et retourne l'histogramme de celle-ci.

Soit `img` une image de hauteur h, de largeur l et de profondeur p. Soit h_i son histogramme et soit $v_{\min}$ le ton de gris le plus sombre se trouvant dans l'image `img`. On égalise les tons en transformant chaque ton v en v' défini ainsi :

$$v' = p \times \frac{\left(\sum_{k=0}^{v} h_i[k]\right) - h_i[v_{\min}]}{h \times l - h_i[v_{\min}]} \qquad \text{pour } v_{\min} \leqslant v \leqslant p.$$

On note que v' n'est pas défini pour v tel que $0 \leqslant v < v_{\min}$, ce qui n'a pas d'importance, ces tons v étant absents de l'image. On note surtout que la valeur de v' ci-dessus n'est généralement pas un entier. On rappelle à cette occasion que la commande `int(round(x, 0))` renvoie l'entier le plus proche de x.

Question 8. Écrire la fonction `egaliser(img)` qui prend une image `img` en argument et qui renvoie une nouvelle image qui est `img` dont les tons de gris sont égalisés. Par exemple, l'image F de la figure 2 résulte de l'application de `egaliser` à l'image A.

Question 9. Que renvoie la fonction `egaliser` appliquée à une image uniformément blanche ?

On cherche maintenant à réduire la profondeur d'une image de p vers q avec $q \leqslant p$. Une technique consiste à remplacer un ton v par un ton v' tel que $\frac{v'}{q}$ est le plus proche possible de $\frac{v}{p}$.

Question 10. Écrire une fonction `reduire(img, q)` qui renvoie une nouvelle image dont la profondeur est réduite à q. Par exemple, les images G, H et I de la figure 2 résultent des réductions à 1, 4 et 16 de la profondeur de l'image A.

Partie III. Tramage

Image J Image K Image L Image M Image N

Figure 3 – Tramages.

Lorsqu'il s'agit d'imprimer nos images, on se retrouve confronté à une difficulté : l'encre est noire, le papier est blanc. Il faut donc transformer les images en tons de gris en images en noir et blanc au sens strict. L'appel `reduire(img, 1)` est un moyen de procéder, toutefois le résultat n'est pas très satisfaisant (voir l'image G de la figure 2). Cette partie examine la technique du tramage qui produit des images en noir et blanc (c'est-à-dire de profondeur 1) plus plaisantes, telles les images L, M et N de la figure 3.

On peut voir l'image G comme produite par seuillage, les tons de gris plus grands qu'un certain seuil deviennent blancs, tandis que les autres deviennent noirs. Une idée pour améliorer le rendu des images consiste à faire varier le seuil selon les pixels. Cela revient à représenter les seuils par une matrice, en fait par une image que l'on appelle une *trame*. Une trame est le plus souvent constituée par la répétition d'une petite image, dite *motif*, répétition selon les axes de coordonnées qui finit par paver toute l'image. Par la suite, le seuillage selon une trame sera simplement désigné comme le seuillage selon le motif dont dérive cette trame.

Par exemple, l'image J de la figure 3 est une échelle de gris verticale de profondeur 3 ($h = 4$, $l = 1$, $p = 3$) et la matrice M est un vecteur colonne contenant les entiers de 0 à 3 du haut vers le bas). Sa répétition produit l'image K. On notera que l'image J est présentée agrandie par rapport à l'image K. Le motif J est adéquat pour seuiller les images de profondeur 4, par exemple l'image H de la figure 2, ce qui donne l'image L de la figure 3.

Question 11. Écrire une fonction `tramer(img, tr)` qui prend deux images `img` et `tr` en arguments, et qui renvoie l'image de profondeur 1 obtenue en seuillant l'image `img` selon la trame `tr`. Le seuillage est défini précisément ainsi : étant donnés un ton v de l'image et un ton w de la trame, on obtient un pixel blanc si et seulement si $v > w$, et un pixel noir sinon.

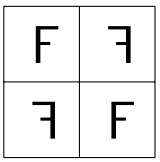
Question 12. Écrire une fonction `tramerTelevision(img)` qui prend en argument une image `img` de profondeur p et qui renvoie l'image de profondeur 1 obtenue en seuillant l'image `img` selon l'échelle de gris verticale de profondeur $p - 1$.

En imprimerie on utilise rarement des trames constituées de lignes horizontales comme la trame K. On préfère les trames constituées de lignes inclinées de points, ou *trames diagonales*. On obtient une trame diagonale de profondeur 15 par répétition du motif 8×8 représenté ci-dessous, à droite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 13 & 9 & 6 & 2 \\ 15 & 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \quad \xrightarrow{?}$$

Le motif de droite dérive de l'image 4×4 représentée à gauche. On supposera par la suite qu'une variable globale `motif1` contient l'image de gauche.

Question 13. Définir le motif de droite qu'on baptisera `motif2` à l'aide du `motif1` et des opérations définies dans la première partie. Ce second motif se déduit du premier par le modèle suivant :



où F représente `motif1`.

Question 14. Écrire une fonction `tramerJournal(img)` qui prend en argument une image `img` de profondeur 16, et qui renvoie l'image de profondeur 1 obtenue en seuillant l'image `img` selon la trame diagonale de profondeur 15. Par exemple, l'image M de la figure 3 résulte de l'application de tramerJournal à l'image I de la figure 2.

Question 15. Indiquer un procédé simple qui permet d'obtenir l'image N de la figure 3 à partir de l'image I de la figure 2 et à l'aide de la trame diagonale de profondeur 15. On notera que l'image N est bien une image de profondeur 1, et qu'elle est représentée réduite (d'un facteur 2) par rapport à l'image M. Coder ensuite votre procédé comme une fonction qui prend une image de profondeur arbitraire en argument.

♦ ♦
♦