Oraux Centrale avec Python

Les questions précédées d'une étoile sont celles qui font appel à l'outil informatique.

Arithmétique et algèbre générale

Exercice 1

Pour $n \geqslant 1$, on note $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.

★ *a)* Écrire une fonction `prime(n)` qui renvoie `True` si n est premier et `False` sinon.

★ *b)* Écrire une fonction `pi(n)` qui renvoie $\pi(n)$.

★ *c)* Afficher les valeurs de $\dfrac{n}{\pi(n)}$ pour $n \in \{10^1, 10^2, \ldots, 10^6\}$. En déduire une conjecture de la limite de $\dfrac{n}{\pi(n)}$.

d) On suppose savoir que pour tout $n \geqslant 2$, $\pi(n) \leqslant 2\ln 2 \dfrac{n}{\ln n}$. Confirmer la conjecture de la question précédente.

On note (E_k) l'équation $n = k\pi(n)$ d'inconnue n, avec $k \in \mathbb{Q}$.

e) Montrer que toute solution de (E_k) est inférieure ou égale à 2^{2k}.

★ *f)* Trouver automatiquement les solutions de $(E_{11/2})$.

g) On étudie maintenant (E_k) pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. On pose $F_k = \left\{ n \geqslant 2 \;\middle|\; n \leqslant k\pi(n) \right\}$. Montrer que F_k est fini et que son plus grand élément est solution de (E_k).

Exercice 2

Dans ce sujet, n désigne un entier strictement positif. On rappelle que l'indicatrice d'Euler de n, notée $\varphi(n)$, est le nombre d'entiers $k \in [\![0, n-1]\!]$ premiers avec n.

a) Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(10)$ et $\varphi(p)$ pour p premier.

★ *b)* Expliquer pourquoi l'algorithme suivant fonctionne en exhibant un invariant de boucle, c'est-à-dire une propriété $\mathscr{P}(i)$ qui est vérifiée à chaque étape de la boucle principale.

```python
def premAvec(n):
    """Renvoie la liste des entiers 0 <= k < n premiers avec n"""
    if n == 1:
        return [0]
    table = [0] + [1 for i in range(1,n)]
    # objectif final: table[i] == 1 ssi pgcd(n,i) == 1
    for i in range(2, n//2 + 1):
        if table[i] == 1 and n % i == 0:
            for k in range(1, (n-1)//i + 1):
                table[k*i] = 0
    return [i for i in range(1,n) if table[i] == 1]
```

★ *c)* Écrire une fonction Python `phi(n)` qui renvoie l'indicatrice d'Euler de l'entier n représenté par l'objet Python nommé `n` en utilisant la fonction `premAvec`.

★ *d)* Calculer $\varphi(1024 \times 81)$ et $\varphi(1024)\varphi(81)$. Que conjecturez-vous ? Tester votre conjecture avec d'autres exemples.

e) Démontrer cette conjecture.

Exercice 3

Pour $n \geqslant 1$ on note $E_n = [\![0, n-1]\!]$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de E_n. En Python, une permutation $\sigma \in E_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \ldots, \sigma(n-1)]$.
Pour $x \in E_n$, la *période* de x pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que $\sigma^p(x) = x$. On le note $\mathrm{Per}(\sigma, x)$.
L'*ordre* d'une permutation σ est le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}$.

a) Justifier l'existence de $\mathrm{Per}(\sigma, x)$ et montrer qu'elle est plus petite que n. Préciser l'ordre de σ en fonction des $\mathrm{Per}(\sigma, x)$.

★ *b)* Écrire une fonction Python qui renvoie la période d'un élément x pour une permutation σ.

★ *c)* Écrire une fonction Python qui renvoie la liste des périodes, pour une permutation σ, des éléments de E_n. Application : $\sigma = [3, 6, 7, 0, 2, 1, 8, 5, 4, 9]$.

d) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit une relation $\mathscr{R}_\sigma$ sur E_n par : $x\mathscr{R}_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \,\big|\, y = \sigma^k(x)$. Montrer que $\mathscr{R}_\sigma$ est une relation d'équivalence.

On appelle *orbite* d'un élément $x \in E_n$ sa classe d'équivalence ; on la note $\Omega_\sigma(x)$.

e) Montrer que $\Omega_\sigma(x) = \left\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\right\}$ où $p = \mathrm{Per}(\sigma, x)$.

★ *f)* Écrire une fonction Python qui renvoie la liste des orbites d'une permutation σ.

Exercice 4

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes réels à coefficients dans $\{0,1\}$.

a) Soient P et Q dans $\mathscr{A}$. Montrer que $P(-2) = Q(-2)$ si et seulement si $P = Q$.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{A}$ tel que $n = P(-2)$.

★ *c)* Écrire une fonction Python de variable d'entrée n et calculant P.

d) Donner P pour $n = 2015$.

Algèbre linéaire

Exercice 5

Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ on introduit la matrice suivante : $M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a-2b & -6a+6b+3 \\ a-b & -2a+3b+1 \end{pmatrix}$.

★ *a)* On note $e(a,b)$ le réel $|\lambda_1 - \lambda_2|$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres complexes de $M(a,b)$. Écrire en Python une fonction `ecart` qui, étant donnés deux entiers a et b renvoie une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de $e(a,b)$.

★ *b)* Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Écrire en Python une fonction `hasard` qui, étant donné p, réalise la simulation de 500 valeurs (a,b) du couple de variables aléatoires (A,B) et renvoie le nombre de fois où `ecart(a, b)` est supérieur ou égal à 10^{-1}.

★ *c)* Pour $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100}$, relier les points de coordonnées $\left(p, \frac{\mathtt{hasard}(p)}{500}\right)$.

★ *d)* Sur le même graphe, tracer la courbe de la fonction $p \longmapsto \dfrac{2-2p+p^2}{2-p}$ pour p dans $]0,1[$.

e) Montrer que la matrice $M(a,b)$ est semblable à $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. À quelle condition est-elle diagonalisable ?

f) Calculer la probabilité de l'événement « $M(a,b)$ est diagonalisable ».

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$ un entier et a un réel non nul. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

★ *a)* Écrire une fonction Python qui, étant donnés un entier $n \geqslant 1$ et un réel a non nul renvoie la matrice $A_{n,a}$.

★ *b)* Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $3 \leqslant n \leqslant 8$ et a dans $\{-2,-1,1,2,3\}$.

★ *c)* Soit $(P_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X \qquad P_2 = X^2 - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

Calculer les coefficients de $P_3, \dots, P_8$, puis donner des valeurs approchées des racines de ces polynômes.

d) Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$ et le démontrer.

e) Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? diagonalisables ?

f) Trouver un segment de $\mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

Analyse

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le développement en base 2 de n : $n = \sum_{k=0}^{k_n} \varepsilon_{k,n} 2^k$ où k_n est dans $\mathbb{N}$, les $\varepsilon_{n,k}$ dans $\{0,1\}$ et $\varepsilon_{k_n,n} = 1$.

On pose $\mathrm{L}(n) = 2^{k_n}$ et $\mathrm{S}(n) = \sum_{k=0}^{k_n} \varepsilon_{k,n}$. On fixe enfin $\alpha > 0$.

★ *a)* Définir les fonctions L et S en Python.

★ *b)* Ecrire en Python une fonction d'argument (N, α) calculant la somme partielle à l'ordre N de la série $\sum \frac{1}{\mathrm{L}(n)^\alpha \mathrm{S}(n)}$.

c) Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $b_n = 2^n a_{2^n}$. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum b_n$ converge.

d) Pour quelles valeurs de α la série $\sum \frac{1}{\mathrm{L}(n)^\alpha \mathrm{S}(n)}$ converge-t-elle ?

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ on pose $\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!}$ et $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{P}_n(x)$.

★ *a)* Écrire en Python une fonction `P(n, x)` qui renvoie la valeur de $\mathrm{P}_n(x)$. Vérifier que $\mathrm{P}_7(0{,}1) = 2{,}0137348$.

★ *b)* Tracer le graphe de la restriction de f_n à $[0,2]$ pour quelques valeurs de n. Conjecturer un résultat relatif à la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Montrer que, pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \geqslant n$, $n^{k-n} \leqslant \frac{k!}{n!}$. En déduire que $0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \frac{(nx)^n}{n!(1-x)}$.

Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ sur $[0,1[$.

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$. Montrer que l'application $k \mapsto \frac{(nx)^k}{k!}$ est croissante sur $[\![0, n-1]\!]$, puis que $f_n(x) \leqslant n\,\mathrm{e}^{-nx} \frac{(nx)^n}{n!}$.
Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ sur $]1, +\infty[$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}$. Montrer les relations $u_n = 1 - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$, puis $1 - 2u_n = \frac{\mathrm{e}^{-n}\, n^n}{n!}(a_n + b_n - c_n)$ où on pose, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $\lambda_{n,k} = \frac{n^{k-n} n!}{k!}$, $a_n = \sum_{k=2n}^{+\infty} \lambda_{n,k}$, $b_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \lambda_{n,k}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n,k}$.

f) Avec les notations précédentes, montrer que si $k \geqslant 2n$, $\lambda_{n,k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2n+1}$, et en déduire la limite de $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Probabilités

Exercice 9

Un pion se trouve à l'instant 0 sur la case 0 d'un parcours linéaire dont les cases sont numérotées par les entiers consécutifs. À chaque étape, il avance d'un nombre strictement positif aléatoire de cases. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note Y_n le nombre de cases dont il avance à la n^{e} étape. Ainsi, $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_n$ est sa position à l'instant n, avec $\mathrm{S}_0 = 0$ par convention. On suppose que les variables $(\mathrm{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes. On note par conséquent :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad f_i = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = i) \quad \text{et} \quad f : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k t^k$$

respectivement la loi et la fonction génératrice de Y_n. Par hypothèse, f_i ne dépend pas de n, et $f_0 = 0$.

★ *a)* Dans cette question et la suivante, on suppose que $\mathrm{Y}_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on choisit un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
Écrire en Python une fonction prenant en argument les paramètres p et k et simulant l'expérience jusqu'à ce que le pion dépasse (au sens large) la position k. La fonction renverra 1 si le point a atterri sur la case k et 0 s'il l'a dépassée sans s'y arrêter.

★ *b)* Pour un entier k assez grand et des valeurs de p de votre choix, calculer sur une centaine d'essais la proportion de tentatives pour lesquelles le pion atteint la position k exactement. Comparer avec $1/\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)$.

Pour tout entier k, on note $\mathrm{E}_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{S}_n = k)$ et $u_k = \mathrm{P}(\mathrm{E}_k)$. Ainsi, u_k est la probabilité que le pion passe par la case k lors de son parcours.

c) Soit $1 \leqslant j \leqslant k$. Prouver que $\mathrm{P}(\mathrm{E}_k \cap (\mathrm{Y}_1 = j)) = f_j u_{k-j}$.

d) En déduire que $u_k = f_k u_0 + f_{k-1} u_1 + \cdots + f_1 u_{k-1}$.

On note u la fonction génératrice de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$. $u : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$.

e) Justifier que u est bien définie sur $]-1,1[$ et que pour tout $t \in]-1,1[$, $u(t) = \dfrac{1}{1-f(t)}$.

f) En déduire l'expression de u, celle de u_k en fonction de k et enfin la limite de cette suite lorsque k tend vers $+\infty$ dans les deux cas suivants :

- Y_1 suis une loi géométrique de paramètre p ;
- $\mathrm{Y}_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Déterminer par ailleurs $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)$ dans les deux cas. Que remarque-t-on ?

Exercice 10

Aux cinq sommets d'un pentagone sont postés des joueurs de discoplane. Au début du jeu, deux des joueurs, voisins immédiats, ont entre les mains un discoplane. Ils envoient le discoplane à l'un de leurs deux voisins immédiats, et les receveurs font de même à l'étape suivante. Le jeu s'arrête lorsque les deux discoplanes sont entre les mains d'un même joueur. On note T la variable aléatoire qui numérote l'étape à laquelle le jeu s'arrête.

★ *a)* Estimer numériquement $\mathrm{E}(\mathrm{T})$.

b) Soit $n \geqslant 0$. On note a_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de voisins immédiats à l'étape n, et b_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de joueurs différents et non voisins immédiats. On pose $\mathrm{A}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\mathrm{B}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T} = n) z^n$ à l'aide de $\mathrm{A}(z)$ et $\mathrm{B}(z)$ puis en déduire la valeur de $\mathrm{E}(\mathrm{T})$.

c) Généraliser au polygone à $2p+1$ côtés.