Corrigé : groupe critique d'un graphe (ENS 2009)

Partie I. Matrice d'incidence et matrice Laplacienne d'un graphe

Question 1.1. Avec les notations de l'énoncé, le coefficient d'indice (i,j) de $\mathrm{L_G}{}^t\mathrm{L_G}$ est égal à : $\tilde{e}_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} \ell_{i,k}\ell_{j,k}$.

– Si $i = j$ alors $\tilde{e}_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} \ell_{i,k}^2 = \sum\limits_{\{i,j\}\in\mathrm{E}} 1 = d_i$, le nombre d'arêtes incidentes à i ;
– si $i \neq j$ et si i n'est pas adjacent à j alors quel que soit $k \in [\![1,m]\!]$, $\ell_{i,k} = 0$ ou $\ell_{j,k} = 0$ et $\tilde{e}_{i,j} = 0$;
– si $i \neq j$ et si i et j sont adjacents, il existe une unique valeur de k telle que la k-ème arête soit $\{i,j\}$. Dans ce cas $\tilde{e}_{i,j} = \ell_{i,k}\ell_{j,k}$ avec $\ell_{i,k} = -\ell_{j,k}$ donc $\tilde{e}_{i,j} = -1$.

Dans tous les cas nous avons montré que $\tilde{e}_{i,j} = e_{i,j}$ donc $\mathrm{L_G}{}^t\mathrm{L_G} = \Delta_\mathrm{G}$.

Question 1.2. $\Delta_\mathrm{G} v = \lambda v \iff \mathrm{L_G}{}^t\mathrm{L_G} v = \lambda v$ donc $\lambda\|v\|^2 = {}^t v(\lambda v) = {}^t v \mathrm{L_G}{}^t\mathrm{L_G} v = {}^t({}^t\mathrm{L_G} v)({}^t\mathrm{L_G} v) = \|{}^t\mathrm{L_G} v\|^2$.

Nous avons $\|v\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2$ et $\|{}^t\mathrm{L_G} v\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \ell_{i,k} v_i\Big)^2$. Si $\{i,j\}$ est la k-ème arête de E alors $\ell_{i,k} = \pm 1$, $\ell_{j,k} = -\ell_{i,k}$ et $\ell_{\alpha,k} = 0$ pour $\alpha \notin \{i,j\}$ donc $\|{}^t\mathrm{L_G} v\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} (v_i - v_j)^2$. Ainsi, $\lambda = \sum\limits_{\{i,j\}\in\mathrm{E}} (v_i - v_j)^2 \Big/ \sum\limits_{i} v_i^2$.

La matrice Δ_G est symétrique réelle et nous venons de prouver que ses valeurs propres sont positives ; il s'agit donc d'une matrice symétrique positive.

Question 1.3. $\ker(\Delta_\mathrm{G})$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ donc d'après la question précédente,

$$v \in \ker(\Delta_\mathrm{G}) \iff \sum_{\{i,j\}\in\mathrm{E}} (v_i - v_j)^2 = 0 \iff v_1 = v_2 = \cdots = v_n.$$

En effet, si i et j désignent deux sommets distincts il existe une suite d'arêtes $\{i_k, i_{k+1}\}$ telle que $i_0 = i$ et $i_q = j$ et alors $\sum\limits_{k=0}^{q-1} (v_{i_k} - v_{i_{k+1}})^2 = 0$ donc $v_{i_0} = \cdots = v_{i_q}$, ce qui prouve que $v_i = v_j$.

$\ker(\Delta_\mathrm{G})$ est bien la droite vectorielle engendrée par le vecteur e, et d'après le théorème du rang nous avons $\mathrm{rg}(\Delta_\mathrm{G}) = n - 1$.

Plus généralement, si $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ désignent les composantes connexes de G alors

$$v \in \ker(\Delta_\mathrm{G}) \iff \forall \alpha \in [\![1,p]\!], \quad \forall (i,j) \in \mathrm{C}_\alpha^2, \quad v_i = v_j.$$

$\ker(\Delta_\mathrm{G})$ est cette fois de dimension p et $\mathrm{rg}(\Delta_\mathrm{G}) = n - p$.

Question 1.4. Nous avons :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{G},k} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{\mathrm{L_G}\mathrm{L_G}}} & 0 \\ & \vdots \\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 & 1 \\ & \vdots \\ \boxed{\phantom{\mathrm{L_G}\mathrm{L_G}}} & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathrm{L}_{\mathrm{G},k} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{\mathrm{L}}} & 0 & \boxed{\phantom{\mathrm{L}}} \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ 0 \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}_{\mathrm{G},k}{}^t\mathrm{L}_{\mathrm{G},k} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{\mathrm{L}}} & 0 & \boxed{\phantom{\mathrm{L}}} \\ & \vdots & \\ 0 \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots 0 \\ & \vdots & \\ \boxed{\phantom{\mathrm{L}}} & 0 & \boxed{\phantom{\mathrm{L}}} \end{pmatrix}$$

où les zones blanches correspondent aux coefficients respectifs des matrices $\mathrm{L_G}$, ${}^t\mathrm{L_G}$ et de leur produit, à savoir Δ_G. On a donc $\mathrm{L}_{\mathrm{G},k}{}^t\mathrm{L}_{\mathrm{G},k} = \Delta_{\mathrm{G},k}$. De cette égalité il résulte comme à la question 2 que si v est un vecteur propre de $\Delta_{\mathrm{G},k}$ associé à la valeur propre λ alors $\lambda\|v\|^2 = \|{}^t\mathrm{L_G} v\|^2$. Cette égalité se traduit cette fois par :

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{k\notin\{i,j\}\in\mathrm{E}} (v_i - v_j)^2 + \sum_{\{i,k\}\in\mathrm{E}} v_i^2 + v_k^2.$$

La valeur propre $\lambda = 0$ donne une équation du noyau ; cette fois $v \in \ker \Delta_{\mathrm{G},k}$ si et seulement si : $v_k = 0$, $v_i = 0$ si $\{i,k\} \in \mathrm{E}$ et $(i,j) \in \mathrm{C}_\alpha^2 \Rightarrow v_i = v_j$. Autrement dit, la dimension du noyau est égale à $p - 1$ si p désigne le nombre de composantes connexes de G. Ainsi, $\mathrm{rg}(\Delta_{\mathrm{G},k}) = n + 1 - p$ et en particulier, si G est connexe la matrice $\Delta_{\mathrm{G},k}$ est de rang n.

Question 1.5. Si on part de la matrice $\Delta_{G,k}$ et qu'on effectue les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + e_{i,k}L_k$ pour $i \neq k$ on ne modifie pas son rang et on obtient une matrice dont les lignes sont les coefficients des vecteurs $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \setminus \{\Delta_k\} \cup \{x_k\}$. Le rang de cette famille est donc égal au rang de la matrice $\Delta_{G,k}$; elle est de rang n si et seulement si G est connexe.

Question 1.6. D'après les formules de Cramer nous avons $v_i = \dfrac{d_i}{d}$ avec $d = \det A$ et $d_i = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n)$ où a_i désigne la i-ème colonne de A. Puisque A et a sont à coefficients entiers nous avons $d \in \mathbb{Z}$ et $d_i \in \mathbb{Z}$. Posons $\delta = |d|$, $d = \varepsilon\delta$, et effectuons la division euclidienne de εd_i par δ : $\varepsilon d_i = \delta v_i'' + v_i'$ avec $0 \leqslant v_i' < \delta$. Alors $v_i = \dfrac{v_i'}{\delta} + v_i''$.

Partie II. Le groupe critique d'un graphe

Question 2.1. L'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers des g_i forme un groupe (évident) et tout sous-groupe qui contient les g_i doit le contenir donc il s'agit bien de $\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$.

Question 2.2. Par définition de la matrice Δ_G nous avons $\sum\limits_i \Delta_i = 0$ donc toute combinaison à coefficients entiers de $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ peut aussi s'écrire comme combinaison de $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \setminus \{\Delta_i\}$.

Question 2.3. La relation est réflexive puisque $0 \in H$; elle est symétrique puisque $x - y \in H \iff -(x-y) \in H$; elle est transitive puisque $(x - y \in H \text{ et } y - z \in H) \Longrightarrow (x-y) + (y-z) \in H$.

Question 2.4. Il importe avant tout de prouver que l'addition ainsi définie ne dépend pas du choix des représentants des classes. Considérons donc quatre éléments tels que $\overline{x} = \overline{x'}$ et $\overline{y} = \overline{y'}$. On a $x - x' \in H$ et $y - y' \in H$ donc $x - x' + y - y' = (x+y) - (x'+y') \in H$, ce qui prouve que $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$.
Il reste alors à constater que :
- $\overline{0}$ est un élément neutre de K/H ;
- l'addition est associative puisque $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} + \overline{y+z} = \overline{x + (y+z)} = \overline{(x+y)+z} = \overline{x+y} + \overline{z} = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$;
- l'addition est commutative puisque $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \overline{y} + \overline{x}$;
- tout élément possède un inverse puisque $\overline{x} + \overline{-x} = \overline{0}$.

Question 2.5. Considérons un élément $a \in \mathbb{Z}^n$. D'après la question 1.5 la famille $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \setminus \{\Delta_k\} \cup \{x_k\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ donc il existe un unique vecteur v tel que $a = \sum\limits_{i \neq k} v_i \Delta_i + v_k x_k$. Cette équation représente un système de Cramer $a = Av$ dont les coefficients sont à coefficients entiers ; d'après la question 1.6 le vecteur v s'écrit sous la forme : $v_i = \dfrac{v_i'}{\delta} + v_i''$ où les variables sont entières et vérifient $0 \leqslant v_i' < \delta$.
Posons $a' = \dfrac{1}{\delta}\Big(\sum\limits_{i \neq k} v_i' \Delta_i + v_k' x_k\Big)$. D'après la question 2.2, $a - a' \in \Delta(G, k)$ donc $\overline{a} = \overline{a'}$. Or a' ne peut prendre que δ^n valeurs distinctes donc le nombre de classes d'équivalences est fini : $C(G, k)$ est un groupe de cardinal fini.

Question 2.6. Considérons l'application $\overline{\phi} : K/H \to K'/\phi(H)$ « définie » par $\overline{\phi}(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$, et commençons par montrer que cette définition a bien un sens en considérant x et x' tels que $\overline{x} = \overline{x'}$. On a $x' = x + (x' - x)$ donc $\phi(x') = \phi(x) + \phi(x' - x)$. Mais $\phi(x' - x) \in \phi(H)$ donc $\overline{\phi(x')} = \overline{\phi(x)}$. Ceci montre que $\overline{\phi}(\overline{x})$ ne dépend pas du représentant de la classe $\overline{x}$ et donne bien un sens à la définition ci-dessus.
Il reste à prouver que $\overline{\phi}$ est un isomorphisme de groupe :
- $\overline{\phi}(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{\phi}(\overline{x+y}) = \overline{\phi(x+y)} = \overline{\phi(x) + \phi(y)} = \overline{\phi(x)} + \overline{\phi(y)} = \overline{\phi}(\overline{x}) + \overline{\phi}(\overline{y})$;
- $\overline{\phi}(\overline{x}) = \overline{\phi}(\overline{y}) \iff \phi(x) - \phi(y) \in \phi(H) \iff \phi(x-y) \in \phi(H) \iff x - y \in H$ (car ϕ est bijectif) $\iff \overline{x} = \overline{y}$.

Question 2.7. Les égalités $\phi(x_i) = y_i$ définissent un unique morphisme de groupe de $\mathbb{Z}^n$ dans lui-même :

$$\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \phi(v) = \sum_{i \neq k} v_i (x_i - x_k) - v_k x_\ell = \sum_{i \notin \{k, \ell\}} v_i x_i - \Big(\sum_{i \neq k} v_i\Big) x_k + (v_\ell - v_k) x_\ell.$$

Il s'agit d'un isomorphisme de groupe car quel que soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ on a :

$$\phi(v) = w \iff \begin{cases} v_i = w_i & \text{pour } i \notin \{k, \ell\} \\ v_\ell = -\sum\limits_{i \neq \ell} w_i \\ v_k = -\sum\limits_{i} w_i \end{cases}$$

Nous allons maintenant montrer que $\phi(\Delta(G,k)) = \Delta(G,\ell)$ ce qui, à l'aide de la question 2.6, nous permettra d'en conclure que $C(G,k) \sim C(G,\ell)$.

Nous avons $\phi(\Delta(G,k)) = \langle \phi(\Delta_1),\dots,\phi(\Delta_n),\phi(x_k)\rangle$. Calculons chacun des termes de cette famille génératrice.

- Si $i \neq k$, $\phi(\Delta_i) = d_i\phi(x_i) + \sum_{j\neq i} e_{i,j}\phi(x_j) = d_i(x_i - x_k) + \sum_{j\notin\{i,k\}} e_{i,j}(x_j - x_k) - e_{i,k}x_\ell = d_i x_i + \sum_{j\notin\{i,k\}} e_{i,j}x_j + e_{i,k}(x_k - x_\ell)$ car $d_i = -\sum_{j\neq i} e_{i,j}$. On a donc $\phi(\Delta_i) = \Delta_i - e_{i,k}x_\ell = \Delta'_i$.
- Si $i = k$, $\phi(\Delta_k) = d_k\phi(x_k) + \sum_{j\neq k} e_{k,j}\phi(x_j) = -d_k x_\ell + \sum_{j\neq k} e_{k,j}(x_j - x_k) = d_k(x_k - x_\ell) + \sum_{j\neq k} e_{k,j}x_j$ car $d_k = -\sum_{j\neq k} e_{k,j}$. On a donc $\phi(\Delta_k) = \Delta_k - d_k x_\ell = \Delta'_k$.

Ainsi, $\phi(\Delta(G,k)) = \langle \Delta'_1,\dots,\Delta'_n,-x_\ell\rangle = \langle \Delta_1 - e_{1,k}x_\ell,\dots,\Delta_n - e_{n,k}x_\ell, x_\ell\rangle = \langle \Delta_1,\dots,\Delta_n,x_\ell\rangle = \Delta(G,\ell)$.

Partie III. Tas de sable sur un graphe et configurations récurrentes

Question 3.1. Si $u \to v$ il existe i tel que $u - v = \Delta_i \in \Delta(G,n)$ donc $\overline{u} = \overline{v}$ (dans le groupe $C(G,n)$). Par récurrence ceci s'étend au cas où $u \xrightarrow{*} v$.

Question 3.2.

(a) Considérons un éboulement $u \to v$ du sommet i. Celui-ci a nécessairement un voisin plus proche du puit, donc $\mu(u) < \mu(v)$ si on munit les potentiels de la relation d'ordre lexicographique.
Par ailleurs, lors d'une suite d'éboulements $u^0 \to u^1 \to \cdots \to u^p$ le nombre N de grains reste constant donc la suite les potentiels $\mu(u^i)$ est strictement croissante et majorée par le vecteur $(N,0,\dots,0)$. Il ne peut donc exister de suite d'éboulements infinie, ce qui prouve l'existence d'au moins une configuration stable v telle que $u \xrightarrow{*} v$.

(b) Considérons deux avalanches conduisant à des états stables v et w : $u = v^0 \to v^1 \to \cdots \to v^p = v$ et $u = w^0 \to w^1 \to \cdots \to w^q = w$, et supposons $p \leqslant q$. Montrons par récurrence sur p que $w = v$.

- Si $p = 0$ alors $u = v$ est un état stable et donc $w = u$.
- Si $p > 0$, soit i tel que $v^1 = v^0 - \Delta_i$. On passe de v^0 à v^1 en éboulant le sommet i donc $u_i \geqslant d_i$ (il y a au moins d_i grains sur le sommet i dans la configuration initiale u). Par ailleurs, puisque w est stable le sommet i ne peut plus être éboulé et $w_i < d_i$. Lors de l'avalanche conduisant à w le sommet i s'est donc éboulé au moins une fois ; notons k le premier entier pour lequel $w^{k+1} = w^k - \Delta_i$. Dans chacune des configurations précédentes le sommet i possède au moins d_i grains donc l'avalanche $v^1 = w^0 - \Delta_i \to w^1 - \Delta_i \to \cdots \to w^k - \Delta_i \to w^{k+2} \to \cdots \to w^q = w$ est licite. Les deux avalanches $v^1 \xrightarrow{*} v$ et $v^1 \xrightarrow{*} w$ sont de longueurs respectives $p-1$ et $q-1$ donc par hypothèse de récurrence $w = v$.

Question 3.3.

(a) On a clairement $u + v \xrightarrow{*} u' + v$ et $u' + v \xrightarrow{*} u' + v'$ donc $u + v \xrightarrow{*} u' + v'$.

(b) Notons d le diamètre de G et N un entier strictement supérieur au maximum des degrés des sommets de G. Posons alors $k = N^d$. On est assuré qu'au moins un des sommets de kv autre que le puit contient au moins N^d grains. Éboulons ce sommet N^{d-1} fois ; chacun de ses voisins contient au moins N^{d-1} grains. Éboulons-les chacun N^{d-2} fois et réitérons ce procédé. Puisque tous les sommets sont à une distance inférieure ou égale à d du sommet initial à la fin de ce processus on a atteint un état w dans lequel chaque sommet possède au moins un grain.

(c) Supposons qu'il existe une configuration positive u' telle que $u' + \delta \xrightarrow{*} u$, et posons $v = u' + \delta - u$. Alors $u + v \xrightarrow{*} u$ et puisque u est stable, $\delta - u$ est positive donc v aussi. Ainsi u est récurrente.
Réciproquement supposons u récurrente et considérons v positive telle que $u + v \xrightarrow{*} u$. D'après la question précédente il existe k et w tel que $kv \xrightarrow{*} w$ et $w_i > 0$ pour $i < n$. Si N est un entier supérieur au degré maximal des sommets de G on a $Nw \geqslant \delta$ et donc $u + kNv \xrightarrow{*} u + Nw = u' + \delta$ avec u' positive. Mais par ailleurs $u + kNv \xrightarrow{*} u$ et par unicité de l'état stable $u' + \delta \xrightarrow{*} u$.

Question 3.4. Sachant que $\sum_i \Delta_i = 0$ on a aussi $u - v \in \langle \Delta_1,\dots,\Delta_{n-1}\rangle$. Posons $u - v = \sum_{i\in I} a_i\Delta_i - \sum_{i\in J} a_i\Delta_i$ avec $a_i > 0$. Posons $w = u + \sum_{i\in J} a_i\Delta_i = v + \sum_{i\in I} a_i\Delta_i$. Alors $w \overset{*}{\Rightarrow} u$ et $w \overset{*}{\Rightarrow} v$.

Question 3.5. $\delta \oplus \delta$ est stable donc $\delta - \delta \oplus \delta$ est positive. Puisque δ est aussi positive, on en déduit que $\varepsilon = \delta + \delta - \delta \oplus \delta$ est positive.

$\delta + \varepsilon = (\delta + \delta) + (\delta - \delta \oplus \delta)$. Les deux configurations $\delta + \delta$ et $\delta - \delta \oplus \delta$ sont positives et $\delta + \delta \xrightarrow{*} \delta \oplus \delta$ donc $\varepsilon + \delta \xrightarrow{*} \delta \oplus \delta + (\delta - \delta \oplus \delta) = \delta$.

Question 3.6. Si $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$ alors par définition u est récurrente (ε est positive d'après la question précédente).

Réciproquement supposons u récurrente : d'après la question 3.3c il existe une configuration positive u' telle que $u' + \delta \xrightarrow{*} u$.

Puisque ε est positive, $u' + \delta + \varepsilon \xrightarrow{*} u + \varepsilon$.

Par ailleurs, d'après la question 3.5, $u' + \delta + \varepsilon \xrightarrow{*} u' + \delta \xrightarrow{*} u$. Par unicité de la configuration stable obtenue par avalanche (question 3.2b), $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$.

Question 3.7. Par définition $\delta + \delta \xrightarrow{*} \delta \oplus \delta$ donc $\varepsilon = 2\delta - \delta \oplus \delta \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ et ε est positive.

D'après la question 3.3b, il existe un entier k et une configuration w telle que $k\varepsilon \xrightarrow{*} w$ avec $w_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

Notons enfin que puisque $\varepsilon \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ c'est aussi le cas de $k\varepsilon$ et donc de w.

Considérons alors une configuration quelconque u et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i < n$ on ait $u_i + kw_i \geqslant d_i$. On peut alors écrire $u + kw = u' + \delta$ avec u' positive. Posons $v = u \oplus kw$. On a $u + kw \xrightarrow{*} v$ et $w \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ donc $u - v \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$.

Par ailleurs, $(u + kw) + \varepsilon = u' + (\delta + \varepsilon) \xrightarrow{*} u' + \delta = u + kw \xrightarrow{*} v$. Mais on a aussi $(u + kw) + \varepsilon \xrightarrow{*} v + \varepsilon$ donc d'après la question 3.2b on a $v + \varepsilon \xrightarrow{*} v$, ce qui prouve que v est récurrente.

Supposons maintenant qu'il existe une autre configuration récurrente v' telle que $u - v' \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$. Alors $v' - v \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ et d'après la question 3.4 il existe une configuration w telle que $w \overset{*}{\Rightarrow} v$ et $w \overset{*}{\Rightarrow} v'$. En choisissant k assez grand on a $w + k\varepsilon \xrightarrow{*} v + k\varepsilon$ et $w + k\varepsilon \xrightarrow{*} v' + k\varepsilon$. D'après la question 3.6 ceci implique $w + k\varepsilon \xrightarrow{*} v$ et $w + k\varepsilon \xrightarrow{*} v'$. Par unicité de la configuration stable qu'on peut atteindre par avalanche on en déduit $v = v'$.

Question 3.8. Montrons tout d'abord que $\oplus$ est une loi interne à $R(G)$. Si u et v sont deux configurations stables récurrentes, nous savons déjà que $u \oplus v$ est par définition une configuration stable. Par ailleurs $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$ donc $u + v + \varepsilon \xrightarrow{*} u \oplus v$. Mais on a aussi $u + v + \varepsilon \xrightarrow{*} u \oplus v + \varepsilon$ donc par unicité de la configuration stable qu'on peut atteindre par avalanche nous en déduisons $u \oplus v + \varepsilon \xrightarrow{*} u \oplus v$ ce qui prouve que $u \oplus v$ est récurrente.

La loi $\oplus$ est clairement commutative et associative. Notons θ l'unique configuration récurrente telle que $0 - \theta \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$, autrement dit $\theta \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$.

Soit alors $u \in R(G)$. Nous avons $(u + \theta) - (u \oplus \theta) \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ et $(u + \theta) - u \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ donc d'après l'unicité établie à la question précédente, $u \oplus \theta = u$; θ est bien neutre pour la loi $\oplus$.

Considérons enfin l'unique configuration récurrente u' telle que $-u - u' \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$. Alors $(u + u') - \theta \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ et $(u + u') - u \oplus u' \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$ donc $u \oplus u' = \theta$, ce qui prouve que tout élément possède un inverse.

$R(G)$ est donc un groupe commutatif.

Considérons enfin l'application $\phi : \mathbb{Z}^n \to R(G)$ définie par $\phi(u) = v$, où v est l'unique configuration récurrente telle que $u - v \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$. ϕ est un morphisme de groupe surjectif de $(\mathbb{Z}^n, +)$ vers $(R(G), \oplus)$ dont le noyau est $\Delta(G, n)$ donc $R(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n / \Delta(G, n) = C(G)$.